Juniorakademie Neuerburg 2018
Kurs 1 – Knoten

Termumformungen und Polynome

1 Regeln

1.1 Arithmetik

Für $a, b, c \in \mathbb{R}$ gelten das *Kommutativgesetz*

$$a + b = b + a \tag{1}$$
$$a \cdot b = b \cdot a, \tag{2}$$

das *Assoziativgesetz*

$$(a + b) + c = a + (b + c) \tag{3}$$
$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \tag{4}$$

und das *Distributivgesetz*

$$a \cdot (b + c) = ab + ac \tag{5}$$

Beispiele:

$$\begin{gathered}
5 + 3 = 8 \qquad 3 + 5 = 8 \\
5 \cdot 3 = 15 \qquad 3 \cdot 5 = 15 \\
(5 + 3) + 2 = 8 + 2 = 10 \qquad 5 + (3 + 2) = 5 + 5 = 10 \\
(5 \cdot 3) \cdot 2 = 15 \cdot 2 = 30 \qquad 5 \cdot (3 \cdot 2) = 5 \cdot 6 = 30 \\
4 \cdot (2 + 1) = 4 \cdot 3 = 12 \qquad 4 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 8 + 4 = 12 \\
4 \cdot 3 = 4 \cdot (1 + 1 + 1) = 4 + 4 + 4 = 12
\end{gathered}$$

1.2 Brüche

Für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ gilt

$$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc} \tag{6}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b} \qquad \text{(gleicher Nenner)} \tag{7}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{cb}{db} = \frac{ad+cb}{db} \tag{8}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \tag{9}$$

Ist eine Zahl a kein Bruch, so kann man sie künstlich als Bruch schreiben mit Nenner 1:

$$a = \frac{a}{1} \tag{10}$$

Beispiele:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} &= \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3} = \frac{3}{6} \\
\frac{1}{5} + \frac{2}{5} &= \frac{1+2}{5} = \frac{3}{5} \\
\frac{2}{5} - \frac{1}{3} &= \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 3} - \frac{1 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{6}{15} - \frac{5}{15} = \frac{1}{15} \\
\frac{1}{2} \cdot \frac{6}{11} &= \frac{1 \cdot 6}{2 \cdot 11} = \frac{6}{22} = \frac{3 \cdot 2}{11 \cdot 2} = \frac{3}{11}.
\end{aligned}$$

1.3 Potenzen

Für $a, b \in \mathbb{R}^+$, $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}
a^0 &= 1 \\
a^x \cdot a^y &= a^{x+y} \\
(a^x)^y &= a^{x \cdot y} \\
(ab)^x &= a^x b^x \\
a^{-x} &= \frac{1}{a^x} \\
\frac{a^x}{a^y} &= a^{x-y}
\end{aligned}$$

Außerdem gibt es für $n \in \mathbb{N}$ die Schreibweise

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

sowie die Abkürzung $\sqrt{a} = \sqrt[2]{a}$.

Beispiele:

$$
\begin{aligned}
3^0 &= 1 \\
5^2 \cdot 5^{\frac{1}{3}} &= 5^{2+\frac{1}{3}} = 5^{\frac{2\cdot 3}{1\cdot 3}+\frac{1}{3}} = 5^{\frac{7}{3}} \\
(7^3)^2 &= 7^{3\cdot 2} = 7^6 \\
(9^3)^{\frac{1}{2}} &= 9^{3\cdot\frac{1}{2}} = (9^{\frac{1}{2}})^3 = (\sqrt{9})^3 = 3^3 = 27 \\
(2\cdot 3)^2 &= 6^2 = 36 \qquad 2^2 \cdot 3^2 = 4 \cdot 9 = 36 \\
\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} &= 3^2 = 9 \\
\frac{4^{-1}}{4^{-3}} &= 4^{-1-(-3)} = 4^{-1+3} = 4^2 = 16.
\end{aligned}
$$

2 Übungsaufgaben

2.1

Vereinfache die folgenden Ausdrücke. Die Buchstaben der richtigen Antworten ergeben ein Lösungswort.

a) $x^{-1}\left(x^2 + x\right)$

A: $x^2 + 1$
K: $\frac{1}{x} + 1$
P: $x + 1$
E: $2x$

b) $1 - x^{-2}\left(x^3 + x^2 + x^{-2}\right) + x^3(x^2 - 2)$

E: $x^5 - 2x^3 - x + 2 + \frac{1}{x^4}$
A: $x^5 - 2x^3 - x - \frac{1}{x^4}$
B: $-x^5 - 2x^3 - x - \frac{1}{x^4}$
N: $-x^4 - 2x^3 + 1 - \frac{1}{x^4}$

c) $x^3(x^2 - 8x^{-5}) - x^{-4}\Big(-x^{-3} + 6(x^{-1} - x^{-3}) - 4x^3 + 8x(x - x^{-1}) + x^2\Big)$

L: $x^5 + 4\frac{1}{x} - 17\frac{1}{x^2} + 8\frac{1}{x^4} - 6\frac{1}{x^5} + 7\frac{1}{x^7}$
F: $x^5 - 4x^3 + 9x^2 - 8 + 6\frac{1}{x} - 8\frac{1}{x^2} - 6\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^7}$
S: $x^5 - 4\frac{1}{x} + 17\frac{1}{x^2} - 8\frac{1}{x^4} - 6\frac{1}{x^5} - 7\frac{1}{x^7}$
O: $x^5 - 4\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - 8\frac{1}{x^4} - 6\frac{1}{x^5} - 7\frac{1}{x^7}$

d) $x^{-\frac{1}{4}}(x^2 - x^{\frac{1}{2}})$

S: $x^{\frac{7}{4}} - x^{\frac{1}{4}}$
T: $x^{-\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{4}}$
C: $x^{-\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{8}}$
F: $x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{4}}$

e) $x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{4}}\left(x^{\frac{3}{4}} - (x^{\frac{1}{4}})^2\right)$

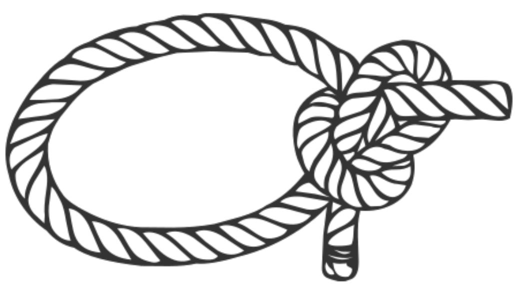
P: $x^{\frac{1}{2}}$
E: $x^{\frac{1}{2}} - x + x^{\frac{1}{4}}$
T: $x^{\frac{1}{4}}$
R: $x^{\frac{3}{4}}$

f) $1 - x^{\frac{1}{2}}\left(1 - x^{\frac{1}{4}}(1 - x^{\frac{1}{8}})\right)$

D: $1 - x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{4}} - x^{\frac{7}{8}}$
A: $1 - x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{3}{4}} - x^{\frac{9}{8}}$
V: $1 - x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{3}{4}} + x^{\frac{7}{8}}$
E: $1 - x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{3}{4}} - x^{\frac{7}{8}}$

g) $x - (-x^2 - 2x^{\frac{3}{2}})x^{-\frac{1}{2}} + 3(x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}})^2$

L: $x^2 + 2x - 3\frac{1}{x}$
N: $x^{\frac{3}{2}} + 2x + 3x^{\frac{1}{2}} + 3\frac{1}{x}$
J: $x^{\frac{3}{2}} + 6x + 3\frac{1}{x}$
K: $x^{\frac{3}{2}} + 6x - 6 + 3\frac{1}{x}$



2.2

Berechne die folgenden Zahlen. Die Buchstaben der richtigen Antworten ergeben ein Lösungswort.

a) $\sqrt{10^4} \cdot \left(10^2 + 10^{-2}\right)$

E: $101,01$
A: 10001
K: 10101
J: 11011

b) $\left(\frac{1}{4} + 2^{-3}\right) \cdot 8 + \left(2^{-2} + \frac{1}{8}\right) \cdot 2^3$

I: 2
N: 4
C: 6
O: 8

c) $\left(3^{\frac{1}{2}} - 3^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot \left(3^{\frac{1}{2}} + 3^{-\frac{1}{2}}\right)$

A: $\frac{2}{\sqrt{3}}$
O: $2\sqrt{3}$
H: $\frac{8}{3}$
N: -1

d) $\frac{3^2}{2^3} \cdot \frac{6^3}{3^6}$

F: 2^{-1}
E: 2
T: 3^{-1}
S: 3

e) $\left(\left(\frac{4}{2\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{3}}\right)^{-\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3$

E: 1
S: $\frac{1}{\sqrt{2}}$
Z: $\sqrt{2}$
A: $2\sqrt{2}$

f) $\sqrt{2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot 2^4}$

I: 8
N: 16
R: 32
T: 64

Image credit: wikipedia user Lucasbosch