

Faksimile
der
besonderen Lernleistung im Fach Physik
am
Wilhelm-Hittorf-Gymnasium

vorgelegt von
Wasilij Barsukow

Fragen, Anregungen und Kritik bitte an w.barsukow@wwu.de.

Der neu eingefügte Anhang II enthält nachträgliche Ergänzungen zu einzelnen
Kapiteln der Arbeit.

Version: 20. März 2013

Besondere Lernleistung im Fach Physik am Wilhelm-Hittorf-Gymnasium, Münster

Regenbögen höherer Ordnungen

Bestimmung der Brechzahl zylindersymmetrischer Körper und der von Flüssigkeiten in ihnen



vorgelegt von Wasilij Barsukow

Betreuender Lehrer: Herr Korfsmeier
Schuljahre 2007-2009

Inhaltsverzeichnis

1	Vorwort	4
2	Einleitung	4
3	Regenbögen in Vollstäben	7
3.1	Entstehung des Regenbogens am Himmel	7
3.2	Mathematik des Strahlengangs	13
3.3	Intensität des Regenbogens	19
3.4	Folgerungen aus der Theorie	22
3.5	Regenbögen im Labor	25
3.6	Zusammenfassung	30
4	Regenbögen in Glasrohren	32
4.1	Grundsätzliche Strahlengänge in einem Rohr	32
4.2	Klassifizierung der Strahlengänge	37
4.3	Entstehung der Regenbögen	42
4.4	Glasrohre im Experiment und in der Simulation	43
5	Schlusswort und Ausblick	47
6	Danksagung	50
7	Anhang I	51
7.1	Über Polygone und ihre Winkelsummen	51
8	Anhang II – Ergänzungen	52
8.1	Systematische Betrachtung der Maximierung	52
8.2	zu 3.4	55
9	Literaturverzeichnis	57

1 Vorwort

Diese Arbeit ist entstanden aus der zum Wettbewerb „Jugend forscht“ 2008 eingereichten. Der erste Teil entspricht sinngemäß der Arbeit für den Regionalwettbewerb (Münster); Dinge, die dort lediglich als Andeutung erwähnt wurden, hatte ich bis zum Landeswettbewerb vertieft und in die entsprechend neu einzureichende Arbeit aufgenommen. Hier habe ich nun versucht, die Ansätze der Landeswettbewerbsarbeit auszudehnen und zu vertiefen.

2 Einleitung

Jeder hat schon einmal einen Regenbogen gesehen. Er war immer und bleibt ein beliebtes Motiv in der Kunst und Literatur. Doch auch Physiker ließen sich für dieses Phänomen begeistern. Erste Versuche einer Erklärung und die erste, lange Zeit als erschöpfend betrachtete Descartes'sche, stammen sogar aus der Zeit vor Newton ([9]). Sie war zwar nicht richtig im Hinblick auf die Zerlegung der Farben, lieferte aber ansonsten eine bis ins 19. Jahrhundert als vollständig akzeptierte Theorie des Strahlengangs.

Aber selbst die Frage, was genau den Regenbogen überhaupt verursacht, war eine viel diskutierte, und die feinen Tröpfchen offensichtlich nicht die naheliegendste Antwort. Die Geschichte der Erklärungen ist lang und immer wieder erstaunlich. Sie ist in [4] ausführlich dargestellt.

Mittlerweile finden sich Darstellungen der Descartes'schen Theorie in vielen, auch populärwissenschaftlichen ([11]), Büchern. Als Young die Interferenz des Lichts entdeckte, gab es mehrere neue Theorien des Regenbogens ([1], [10]), die nicht mehr in aller Vollständigkeit populärwissenschaftlich erklärbar sind ([5], [6], [7]). Diese Theorien erklären Feinheiten in beobachtenden Spektren. Man kann aber schon aus der Position der Regenbögen auf die optischen Eigenschaften der Objekte schließen, so dass die auf geometrischer Optik beruhende, Descartes'sche Theorie zu diesem Zwecke etwa in [2], [3], [12] Anwendung findet. So soll auch in dieser Arbeit verfahren werden.

Regenbögen höherer Ordnungen sind seltener behandelt worden, da sie im Wesentlichen nur im Labor beobachtbar sind. Eine Gesamtdarstellung findet sich nicht, etwa weist [2] auf ein durch die Theorie vorausgesagtes Fehlen von Regenbögen bei bestimmten Brechzahlen hin, während [3] sich eher der Vermessung und Anwendung der höheren Ordnungen zuwendet. Das erste Kapitel ist also nicht nur als Einführung in die Thematik der höheren Ordnungen von Regenbögen sowie in Begrifflichkeiten und Rechenmethoden gedacht, sondern fasst wesentliche theoretische Erkenntnisse zusammen. Die Vermessung der Regenbogenpositionen erlaubt Rück-

schlüsse auf die Brechzahl. Diese Methode der Brechzahlbestimmung wurde schon in [3] angewandt, allerdings war der Experimentaufbau gänzlich anders als der hier verwendete. Während dort (wie auch in dem über 100 Jahre später erschienenen [12]) Regenbögen in Tropfen erzeugt werden, mache ich meine Experimente zunächst mithilfe von Glasstäben.

Im zweiten Teil wird eine andere Methode gefunden, Regenbögen in Flüssigkeiten zu untersuchen, und zwar, indem man sie in Glasrohren betrachtet. Diese Methode konnte in der Literatur nirgendwo sonst gefunden werden. Sie bedarf einer ausführlichen theoretischen Vorbereitung, welche dann von meinen Experimentiererfahrungen damit gefolgt wird.

Es sind sehr viele mit Erzeugung von Spektren verbundene (Natur-) Erscheinungen bekannt. Unter ihnen sind Newton'sche Ringe auf Pfützen mit Benzin o. ä. bzw auf Seifenblasen die prominentesten Vertreter. Man sieht oft um den Schatten des Flugzeuges, in welchem man über einer Wolkendecke fliegt, bunte Kreise, ähnlich denen, die man um den Mond herum entdeckt, wenn er sich hinter bestimmten Wolken versteckt. Auch die wunderschönen Farben einer CD gehören zu Phänomenen, die nicht unbedingt als Regenbogen zu bezeichnen wären. Ein Regenbogen ist in dieser Arbeit ein Spektrum, das aufgrund einer wellenlängenabhängigen Begrenzung des ausfallenden Lichts ein bestimmtes, durchsichtiges Objekt verlässt. Diese Definition wird hier noch mit Inhalten gefüllt werden, sie ist aber in dieser Allgemeinheit wichtig, weil bei Regenbögen in Rohren mehrere Mechanismen für eine Aufspaltung des weißen Lichts in Spektralkomponenten verantwortlich sind. Die Dimensionen des Objekts werden hinreichend groß gewählt, so dass auch in Randbereichen in guter Näherung auf Auswirkungen der Wellenoptik tatsächlich verzichtet werden kann.

Ein Regenbogen ist gewöhnlich rund. Die Antwort auf die Frage, warum dies so ist, und zwar eine solche, die ein Nachvollziehen ermöglicht, ist auf einen Satz nicht zu beschränken, wie oft in der Praxis festgestellt werden musste. Sie ist in ihren Bestandteilen nicht schwierig, aber komplex, da viele verschiedene Aspekte zusammenkommen. Die mehrmals aufgekommene Antwort „Der Regenbogen muss rund sein, weil die Erde rund ist“ ist leider falsch. Der komplette Zusammenhang ist natürlich nicht für eine Einleitung geeignet, doch möchte ich einige allgemeine Dinge hier schon einmal vorwegnehmen, um das Hauptaugenmerk dieser Arbeit zu verdeutlichen.

Da der Regenbogen, den man sieht, sicherlich nicht das Ergebnis der Lichtbrechung in nur einem Regentropfen ist, muss man, um die Form erklären zu können, die Richtungen der Spektren einzelner Tropfen untersuchen. Daraus lässt sich dann mit ein wenig dreidimensionalem Vorstellungsvermögen oder mit Vektorrechnung die Entstehung des Gesamteindrucks eines Regenbogens nachvollziehen.

Die Form des Regenbogens hängt damit empfindlich von der Form der erzeugenden Objekte ab. Unsymmetrische Körper geben unsymmetrische Regenbögen und umgekehrt: in höchstem Maße runde Tropfen geben runde Regenbögen. Ein zylindrischer Körper wird keine runden, aber zur Zylinderachse symmetrische Regenbögen geben - also z. B. zwei zum Zylinder parallele Geraden. Diese zwei Beispiele sind nicht umsonst gewählt. Die in dieser Arbeit behandelten Regenbögen werden noch eingeschränkt: es werden nur Objekte betrachtet, deren Querschnitt in der Ebene des Lichteinfalls rund ist oder sich darauf zurückführen lässt.

Nach der ursprünglichen Definition würden sich unter dem Begriff des Regenbogens nämlich auch Erscheinungen finden, die man sonst gewöhnlich vom selbigen zu trennen pflegt – etwa das Halo. Dieses entsteht ähnlich, wie ein gewöhnlicher Regenbogen, nur an Eiskristallen in Form hexagonaler Prismen, so dass man ihn sinngemäß nicht vom Regenbogen trennen sollte, aus historischen Gründen dies aber tut. Allerdings wird dieses höchst interessante Phänomen in dieser Arbeit nicht behandelt.

Im nächsten Kapitel wird also nun die natürliche Entstehung des Regenbogens beleuchtet, mit dem Versuch, das Zusammenspiel der einzelnen Aspekte im Zusammenhang darzustellen, ohne sich erst einmal durch Mathematik ablenken zu lassen. Ein Kapitel weiter wird dies dann nachgeholt.

3 Regenbögen in Vollstäben

3.1 Entstehung des Regenbogens am Himmel

Der Regenbogen ist ein Gesamteindruck, der sich aus den Spektren einzelner Tropfen zusammensetzt. Die Vorgänge in jedem einzelnen Tropfen sollen zunächst im Vordergrund stehen. Was mit dem Licht passiert, wenn der Tropfen parallel dem Licht ausgesetzt ist, ist auf Abb. 1 zu erkennen. Es sind mehrere Intensitätsmaxima sicht-

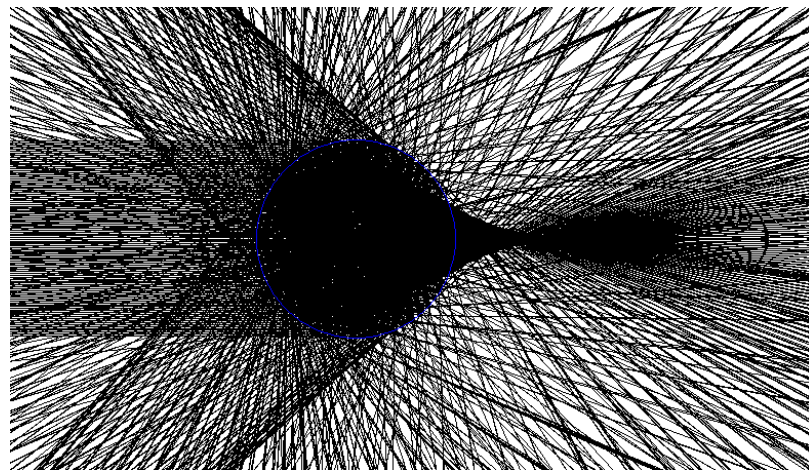


Abbildung 1: Licht im Regentropfen (paralleler Einfall von links)

bar.¹ Deren Entstehung sollte man sich genauer ansehen. In Abb. 2 ist nur noch ein Lichtbündel dargestellt, das den Tropfen trifft. Man erkennt bezüglich der Reflexionen, dass es eine äußere und viele innere gibt, deren Anzahl durch die Intensität des einfallenden Lichts begrenzt wird. Nun muss man, um den Maxima auf den Grund

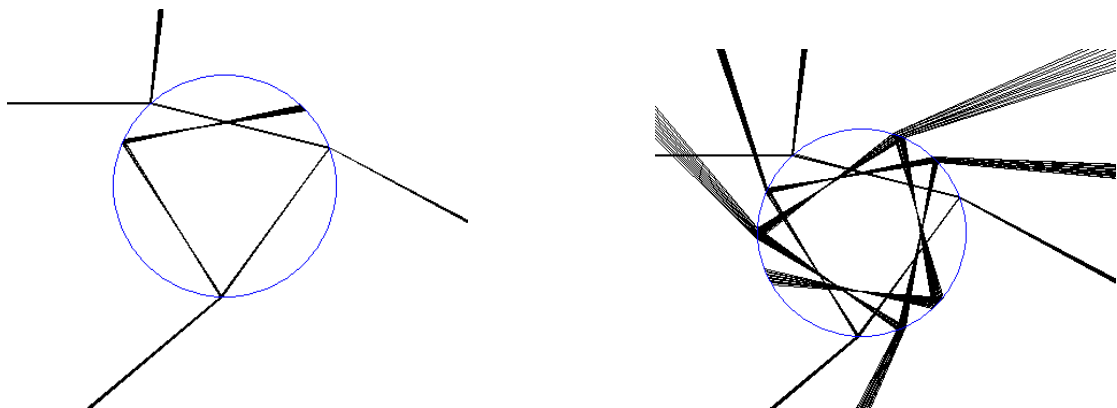


Abbildung 2: Lichtbündel im Regentropfen (paralleler Einfall von links). Im linken Bild sind 3 innere Reflexionen, im rechten – 8 dargestellt.

¹Die tatsächliche Intensität entspricht nur qualitativ den Schwarztönen im Bild. Die komplett schwarze Fläche im Tropfen entsteht durch das Zeichnen verschiedenster Wege der Lichtstrahlen auf engstem Raum; die einzelnen Strahlen verschwimmen aufgrund der zu geringen Auflösung dann zu einer Fläche.

zu gehen, den Strahlengang mathematisieren (Abb. 3). Der Inzidenzstrahl, direk-

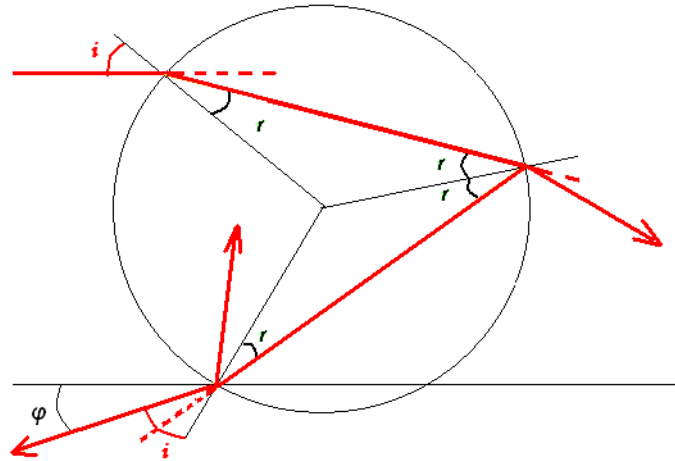


Abbildung 3: Strahlengang im Regentropfen bei nur einer inneren Reflexion

ter Strahl von einer Lichtquelle, trifft in einem beliebigen Punkt des kugelförmigen Regentropfens unter dem Winkel i auf die Oberfläche und wird dort zum Lot hin gebrochen (r für Refraktion). Der Inzidenzstrahl braucht immer nur auf die obere Hälfte des Tropfens zu fallen, weil es wegen der Symmetrie des Problems egal ist, wo der Strahlengang beginnt, aber es deutlich übersichtlicher ist, immer von der oberen Hälfte zu reden. Man kann alle Ergebnisse natürlich auf eine beliebige Hälfte dadurch erweitern, dass man den Querschnitt dreht. Dasjenige Licht, das in den Tropfen gelangt, erfährt eine oder mehrere innere Reflexionen, bevor es wieder austritt.

Dabei bildet es mit der Richtung der Inzidenzstrahlen, wie in Abb. 3 für nur eine Reflexion dargestellt, den Winkel φ . Dieser ist eine Funktion von i . Nun ist auf Abb. 4 der Tropfen dem Licht vollständig ausgesetzt und jeder Strahl erfährt wieder nur eine innere Reflexion. Wenn der Tropfen vollständig ausgeleuchtet wird, sind alle

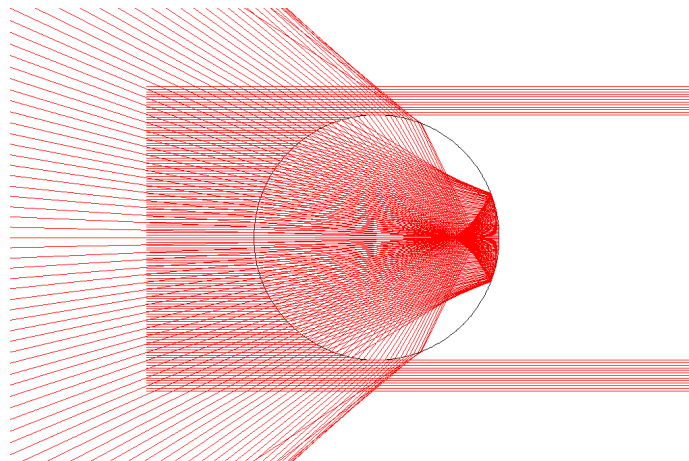
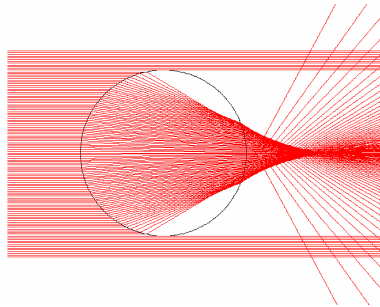


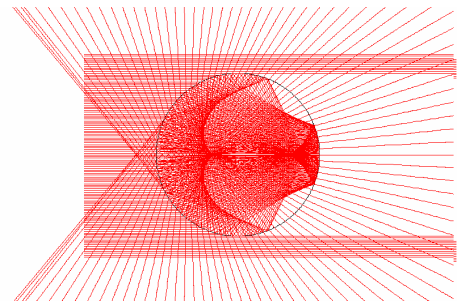
Abbildung 4: Strahlengang im Regentropfen bei nur einer inneren Reflexion

Winkel i vorhanden - von 0 bis 90° . Aber φ nimmt bei Weitem nicht alle möglichen

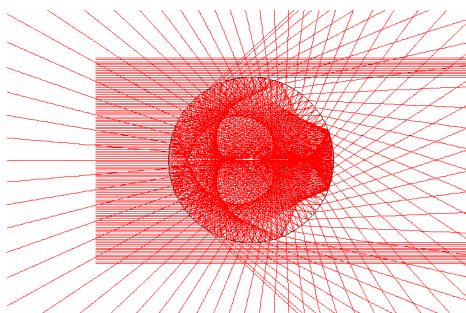
Werte an. Vielmehr steigt der Winkel zuerst mit i an, geht dann aber wieder zurück. Es existiert also (neben dem auch hier deutlich wahrzunehmendem Intensitätsmaximum) ein geometrisches Maximum: kein Licht, das einmal reflektiert wurde, kann sich außerhalb eines maximalen Ausfallswinkels befinden. Wenn man die Dreidimensionalität des ursprünglichen Problems bedenkt und den Querschnitt einmal dreht, stellt man fest, dass das ganze den Tropfen nach einer Reflexion verlassende Licht sich auf einen Kegel beschränkt, dessen Kegelmantel auch noch besonders hell ist. Ähnlich sieht es nach mehrfachen inneren Reflexionen aus; Licht, das keine Reflexion erfährt, zeichnet sich dagegen durch keine derartigen geometrischen Maxima aus (aber sehr wohl ein Intensitätsmaximum!). Der Unterschied zwischen Strahlen, die innen reflektiert und jenen, die nicht reflektiert wurden, wird später durch mathematische Untersuchungen noch bestätigt werden, ebenso die Erweiterung auf eine beliebige Anzahl innerer Reflexionen; hier sind aber schon die entsprechenden Strahlengänge dargestellt. (Abb. 5(a) bis 5(d)).



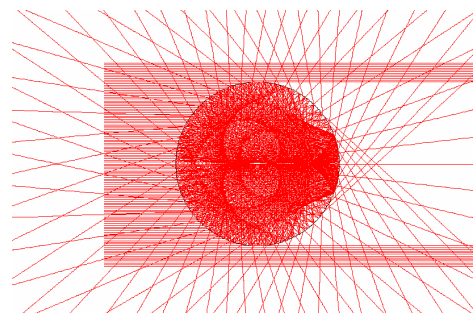
(a) Licht, das den Tropfen ohne eine innere Reflexion verlässt bildet kein geometrisches Maximum aus.



(b) Zwei innere Reflexionen



(c) Drei innere Reflexionen



(d) Vier innere Reflexionen

Es ist nicht überraschend, dass der maximale Ausfallswinkel φ_{\max} von der Brechzahl abhängt. Da sich diese mit der Wellenlänge des Lichts ändert, ist φ_{\max} von der Farbe der Spektralkomponente abhängig. Beim ersten Regenbogen kommt dabei

lediglich das rote Licht bis nach ganz außen, alle anderen Farben befinden sich weiter innen. Sie kommen nacheinander entsprechend ihrer Wellenlänge hinzu, und bilden, wenn die letzte angefügt ist, wieder weißes Licht.

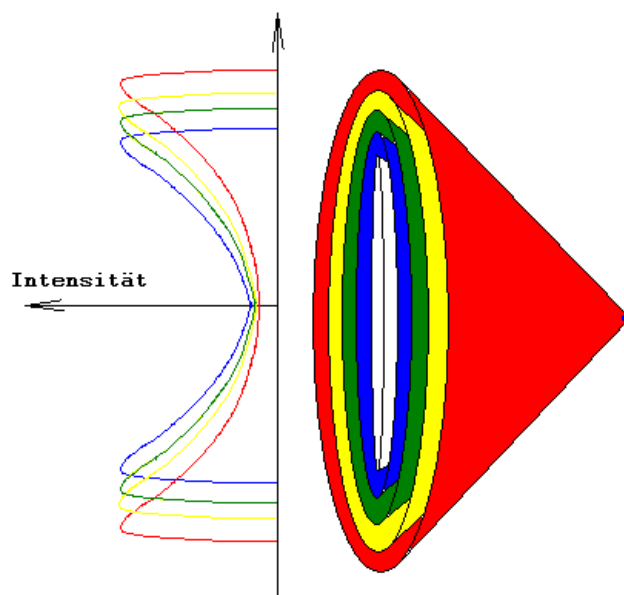


Abbildung 5: Zur Entstehung des Spektrums (überzogene Darstellung)



Abbildung 6: Interferenzstreifen (Kontrast künstlich verstärkt)

Bei kohärentem Licht ist das ausfallende Licht ein Kegel mit besonders intensivem Rand, weißes Licht erzeugt dagegen eine Menge Kegel, die alle wie Matroschkapuppen ineinander liegen (Abb. 5). Das Mittelteil des Gesamtkegels ist weiß, aber wie sieht der Rand aus? Geometrisch argumentiert, wird man dort die jeweils hinausragenden Enden der Kegel sehen – ein rundes Spektrum also. An der Stelle, wo der grüne Kegel ist, müsste man aber eine Mischung aus allen schon zuvor dazugekommenen Farben sehen, also Grün und Gelb und Rot (alle ihre Kegel sind größer und

ragen somit auch hinaus). Warum sieht man aber ein klares Grün? Dies hängt mit den Intensitätsmaxima zusammen: wir sehen tatsächlich eine Mischung, aber Grün hat hier eine überragende Intensität.

Das auf einen Tropfen fallende Licht verlässt ihn also, wenn es mindestens einmal eine innere Reflexion erfahren hat, als Kegel, symmetrisch um den Lichteinfall. Die Größe dieser Kegel ist abhängig von der Farbe des Lichts. Da der Kegelmantel besonders intensiv ist, sieht man dort die einzelnen Spektralkomponenten des weißen Lichts als Spektrum.

Die Frage, wie das Spektrum tatsächlich in der Natur aussehen wird, ist eine deutlich schwierigere. Hier muss man die Wellenoptik verwenden. Dies ist erst im 19. Jh. gemacht worden, etwa von Young², Airy³ und anderen. Young entdeckte, dass das Innere des Kegels auch nicht vollständig weiß ist, sondern dass sich innen am Spektrum noch weitere Streifen finden, meist lila und gelb-grün gefärbt, die durch Interferenz entstehen (in der englischsprachigen Literatur trifft man für sie die Bezeichnung *supernumerary bows* an). Bei besonders intensiven Regenbögen lassen sich manchmal bis zu 5 solcher Streifen beobachten (Abb. 6). Die Lage und Helligkeit der Farben im eigentlichen Spektrum ist ebenfalls eine über die geometrische Optik hinaus führende Frage, deren Antwort bei sehr kleinen Tropfen deutlich von dem geometrischen Resultat abweicht, bis hin zu Nebelbögen, die ganz weiß sind und nur als Intensitätsmaximum auszumachen sind.

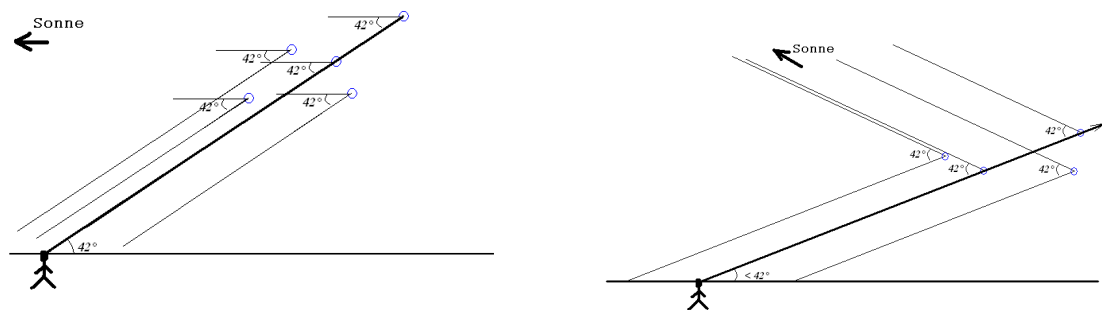


Abbildung 7: Entstehung des Regenbogens aus Spektren einzelner Tropfen

Jeder Wassertropfen erzeugt also nach einer inneren Reflexion einen Kegel, dessen halber Öffnungswinkel etwa 42° beträgt. Wenn jeder der vielen Tropfen in einem kleinen Winkelement rund um 42° ein rundes Spektrum schickt, was sieht ein Beobachter am Boden? Dazu vergleiche man die beiden Abbildungen 7(a) und 7(b). Dort sind jeweils einige Tropfen eingezeichnet, die 42° -Richtungen und ein Beobachter. Man erkennt, dass das, was wir als Regenbogen bezeichnen, das Licht relativ weniger Tropfen ist, welche sich in einer besonderen Position befinden. Das Spektrum

²Thomas Young (1773-1829), engl. Augenarzt und Physiker.

³Sir George Biddell Airy (1801-1892), engl. Mathematiker und Astronom.

der anderen geht an uns im wahrsten Sinne des Wortes vorbei. Dieses Bild muss man eigentlich noch etwas präzisieren. Tropfen stehen nicht still. Sie fallen durch diesen besonderen Bereich, und das farbige Licht sind die Spektren sich ständig wechselnder Tropfen.

Wenn die Tropfen als exakt kugelrund angenommen werden, ist es einleuchtend, warum der Regenbogen dann exakt kreisrund sein muss. Denn auch Tropfen, die seitlich liegen, schicken ihren Teil des Regenbogens an den Beobachter. Man kann mithilfe der Vektorrechnung das Sonnenlicht als Geradenschar mit konstanter Strahlungsrichtung definieren und an jedem Punkt des Raumes eine neue Schar von Geraden einfügen, welche alle durch einen Punkt des Raumes gehen (das Auge des Beobachters) und einen bestimmten Winkel α zum einfallenden Licht haben, aber man wird feststellen, dass diese Geraden kegelförmig angeordnet sind, mit eben demselben halben Öffnungswinkel α .

Der beobachtete Regenbogen in der Natur ist scheinbar immer sehr rund, so dass man die Annahme machen muss, dass fallende Tropfen in sehr guter Näherung kugelrund sind, obwohl auf sie sicherlich die Luftreibung wirkt. Bei kleinen Tropfen verhindert die Oberflächenspannung eine Deformation durch die (hier sehr kleinen) Reibungskräfte. Dabei unterschreiten selbst bei Nieselregen die Tropfen selten $200 \mu m$, man kann also tatsächlich den gewöhnlichen Regenbogen mit geometrischer Optik erklären, ohne dass Fehler durch die Nicht-Berücksichtigung der Wellennatur des Lichts deutlich werden.

Noch mehr Vorstellungsvermögen braucht man, wenn man ein zweites Spektrum dazunimmt. Nach zwei inneren Reflexionen verlässt das Licht den Tropfen in einem weiteren Kegel, der weit vom Tropfen entfernt aussieht, als habe er einen knapp 20° größeren Öffnungswinkel. Das Bild 8 zeigt einen solchen Fall.

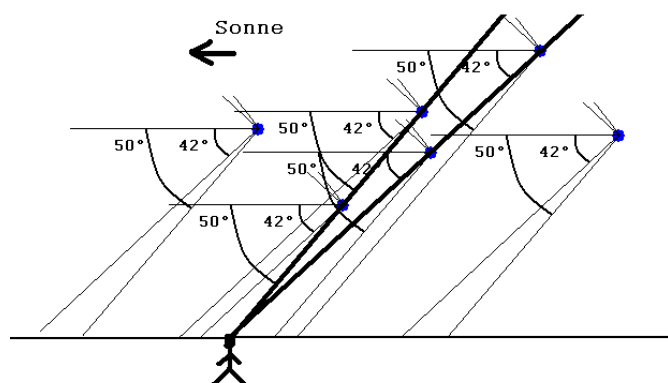


Abbildung 8: Entstehung zweier Regenbögen aus Spektren einzelner Tropfen.

Man sieht als Beobachter also zwei Kreise, mit einer Radiusdifferenz⁴ von knapp 10° (der *halben* Differenz der Öffnungswinkel) (siehe Titelbild). Analog würde

⁴Wie bei Entfernungen am Himmel üblich, wird der Radius des Regenbogen in Grad angegeben.

man noch mehr Kreise sehen, wenn man mehr Reflexionen in Betracht zieht; wo sie erscheinen würden und in welcher Größe, wird im nächsten Kapitel berechnet. Leider ist es in der Natur offenbar nicht möglich, den dritten Regenbogen zu sehen⁵. Aber im Labor sind viel mehr Regenbögen sichtbar, sie werden entsprechend der Anzahl innerer Reflexionen durchnummeriert und man bezeichnet die Gesamtheit als Regenbögen höherer Ordnungen.

Ein Regenbogen ist also ein Kreis mit einem Radius, der mit dem halben Öffnungswinkel des Kegels, φ_{\max} , übereinstimmt. Alle Geheimnisse des Regenbogens sind in der Art und Weise enthalten, was das Licht im Tropfen macht. Nicht nur die Größe des Bogens lässt sich dann daraus ableiten, auch andere Eigenschaften. Das soll also als Anregung dienen, sich ausführlich mit dem Strahlengang zu beschäftigen.

3.2 Mathematik des Strahlengangs

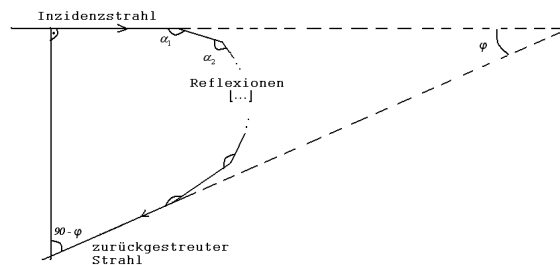
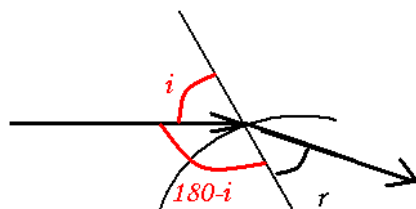
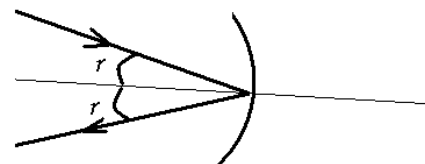


Abbildung 9: Zur Berechnung von φ



(a) Ein- und Austritt an der Oberfläche



(b) Reflexion an der inneren Oberfläche

Abbildung 10: einzelne Winkel im Tropfen

Wenn man den Strahlengang wie in Abb. 9 geschickt zu einem Polygon ergänzt, erhält man: $90 + \sum \alpha + 90 - \varphi = 180 \cdot (m - 2)$. m ist die Anzahl der Ecken des Polygons⁶. Für sie gilt $m = n + 4$, wenn n die Anzahl innerer Reflexionen ist. Alle Reflexionen erzeugen gleiche Winkel α . Mit Abb. 10(b) gilt für ihre Summe $n \cdot 2r$. Hinzu kommen noch zwei Winkel beim Ein- und Austritt, die schon wegen der Umkehrbarkeit des

⁵Ganz abgesehen davon, dass er Richtung Sonne erschiene, ist er wohl zu schwach.

⁶Über Polygone und die Berechnung, φ aus der Winkelsumme zu berechnen, siehe Anhang.

Vorgangs gleich sein müssen. Für sie entnimmt man der Abb. 10(a) $180 - i + r$. Insgesamt ergibt sich also

$$\begin{aligned} 90 + 2nr + 2 \cdot (180 - i + r) + 90 - \varphi &= 180 \cdot (n + 2) \\ 180 + 2nr + 2 \cdot 180 - 2i + 2r - \varphi &= 180 \cdot (n + 2) \\ 3 \cdot 180 - 180 \cdot (n + 2) - 2i + 2r \cdot (1 + n) &= \varphi \\ 180 \cdot (1 - n) - 2i + 2r \cdot (1 + n) &= \varphi \end{aligned}$$

Diese Formel hat eine interessante Besonderheit. Wenn man den Winkel φ berechnet, der bei einer äußeren Reflexion entsteht, erhält man die Formel (vgl. Abb. 11)

$$\varphi = 360 - 2i$$

Sie stimmt mit der obigen überein, wenn man $n = -1$ einsetzt, was schön den definitionsbereich von n erweitert: eine innere Reflexion: $n = 1$, keine Reflexion: $n = 0$, äußere Reflexion: $n = -1$. An späterer Stelle wird diese Eigenschaft bei einer ähnlichen Formel noch einmal auftauchen.

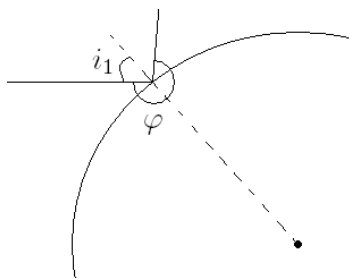


Abbildung 11: Zur Berechnung des Winkels bei einer äußeren Reflexion.

Nun ist r nach dem Snellius⁷'schen Brechungsgesetz eine Funktion von i : $\sin i \cdot n_1 = \sin r \cdot n_2$. Hier bietet es sich an, die relative Brechzahl ν einzuführen: $\nu \equiv \frac{n_2}{n_1}$. Wenn n_1 der Brechzahl von Luft entspricht (also im Normalfall) ist ν lediglich n_2 , also die Brechzahl des Mediums, aus dem der Regentropfen besteht. r ist also $\arcsin(\frac{\sin i}{\nu})$. Es ergibt sich $\varphi = 180(1 - n) - 2i + 2(1 + n) \cdot \arcsin(\frac{\sin i}{\nu})$.

Um die Funktion nach ihren Extrema zu untersuchen, interessiert man sich für den Fall, wenn $\frac{d\varphi}{di} = 0$ ist. Um die Rechnung nicht unnötig zu komplizieren, wird die Ableitung etwas allgemeiner für die Funktion $\varphi = a + bi + c \cdot \arcsin(\frac{\sin i}{\nu})$ geführt und

⁷Willebrord van Roijen Snell (1580-1626), auch Snel van Royen oder Snellius, niederlnd. Astronom und Mathematiker

hinterher entsprechende Terme eingesetzt.

$$\frac{d\varphi}{di} = b + c \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\sin^2 i}{\nu^2}}} \cdot \frac{\cos i}{\nu} = b + \frac{c \cdot \cos i}{\sqrt{\nu^2 - \sin^2 i}}$$

$$0 = b + \frac{c \cdot \cos i_{\max}}{\sqrt{\nu^2 - \sin^2 i_{\max}}}$$

$$-b = \frac{c \cdot \cos i_{\max}}{\sqrt{\nu^2 - \sin^2 i_{\max}}}$$

$$b^2 = \frac{c^2 \cdot \cos^2 i_{\max}}{\nu^2 - \sin^2 i_{\max}}$$

$$b^2(\nu^2 - 1 + \cos^2 i_{\max}) = c^2 \cos^2 i_{\max}$$

$$b^2(\nu^2 - 1) = \cos^2 i_{\max}(c^2 - b^2)$$

$$(\nu^2 - 1) \frac{b^2}{c^2 - b^2} = \cos^2 i_{\max}$$

Bei der speziellen Gleichung ist $b = -2$ und $c = 2(n + 1)$. Also gilt: $\frac{b^2}{c^2 - b^2} = \frac{4}{4(n+1)^2 - 4} = \frac{1}{(n+1)^2 - 1}$ und $\cos i_{\max} = \sqrt{\frac{\nu^2 - 1}{(n+1)^2 - 1}}$. Hier sieht man nun, dass für $n = 0$ kein Extremum existiert, es sei denn ν ist auch gleich Eins, was allerdings für das Problem bedeutungslos ist. Der Kosinus darf natürlich auch sonst nicht größer als 1 werden. Also gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\nu^2 - 1}{(n + 1)^2 - 1} &\leq 1 \\ \nu^2 - 1 &\leq (n + 1)^2 - 1 \\ \nu &\leq (n + 1) \end{aligned}$$

Für den ersten Regenbogen verschwindet das Extremum also bei einem Brechungsindex größer als 2. Dies zu demonstrieren ist nicht ganz einfach, da dies ein recht großer Brechungsindex ist. Aber z. B. manche Zinksalze (ZnSe oder ZnS) oder auch der Diamant haben diese Eigenschaft.

Jetzt muss noch die zweite Ableitung bestimmt werden, um festzustellen, ob bei i_{\max} ein Maximum oder ein Minimum vorliegt.

$$\frac{d\varphi}{di} = b + \frac{c \cdot \cos i}{\sqrt{\nu^2 - \sin^2 i}}$$

$$\frac{d^2\varphi}{di^2} = c \left[\frac{\frac{\sin i \cos^2 i}{\sqrt{\nu^2 - \sin^2 i}} - \sin i \sqrt{\nu^2 - \sin^2 i}}{\nu^2 - \sin^2 i} \right]$$

c ist wegen $n \in \mathbb{N}$ immer größer Null (der Fall äußerer Reflexion soll hier ausgenommen sein). Das Gleiche gilt für den Nenner, da ν definitionsgemäß $\frac{n_2}{n_1}$ und somit größer Eins ist, weil n_2 für das optisch dichtere Medium steht. Bei der Betrachtung, ob die zweite Ableitung nun größer oder kleiner Null ist, darf man auf diese beiden Teile verzichten, was die Rechnung deutlich vereinfacht.

Statt i_{\max} einzusetzen, fragt man, wann $\frac{d^2\varphi_n}{di^2} < 0$ ist:

$$0 > \frac{\sin i \cos^2 i}{\sqrt{\nu^2 - \sin^2 i}} - \sin i \sqrt{\nu^2 - \sin^2 i}$$

$$\sin i \sqrt{\nu^2 - \sin^2 i} > \frac{\sin i \cos^2 i}{\sqrt{\nu^2 - \sin^2 i}}$$

$$\sin i (\nu^2 - \sin^2 i) > \sin i \cos^2 i$$

, weil eine Wurzel niemals negativ sein kann

$\sin i$ ist immer größer Null, da vereinbart worden ist, die obere Hälfte des Tropfens zu betrachten.

$$\nu^2 - \sin^2 i > \cos^2 i$$

$$\nu^2 > \cos^2 i + \sin^2 i$$

$$\nu^2 > 1$$

$$\nu > 1$$

, was immer erfüllt ist.

Also liegt immer ein Maximum vor. Bezüglich dieser Aussage trifft man widersprüchliche Meinungen in der Literatur. Im nächsten Abschnitt wird dieses Thema deswegen wieder aufgegriffen und die Frage nach den Extrema geklärt.

Nun können die Gleichungen zu einer einzigen Formel zusammengesetzt wer-

den.

$$\begin{aligned}\varphi_n &= 180 \cdot (1 - n) + 2r(n + 1) - 2i \\ i_{\max} &= \arccos \sqrt{\frac{\nu^2 - 1}{(n + 1)^2 - 1}} \\ &= \arcsin \sqrt{1 - \frac{\nu^2 - 1}{(n + 1)^2 - 1}} \\ r_{\max} &= \arcsin \left(\frac{\sin i}{\nu} \right) \\ &= \arcsin \left(\frac{1}{\nu} \sqrt{1 - \frac{\nu^2 - 1}{(n + 1)^2 - 1}} \right)\end{aligned}$$

$$\varphi_{\max} = 180(1 - n) + 2(n + 1) \cdot \arcsin \left(\frac{1}{\nu} \cdot \sqrt{1 - \frac{\nu^2 - 1}{(n + 1)^2 - 1}} \right) - 2 \cdot \arcsin \sqrt{1 - \frac{\nu^2 - 1}{(n + 1)^2 - 1}}$$

Diese Formel lässt sich in ein Zeichenprogramm eingeben. Das Ergebnis ist in Abb. 12(a) zu sehen.

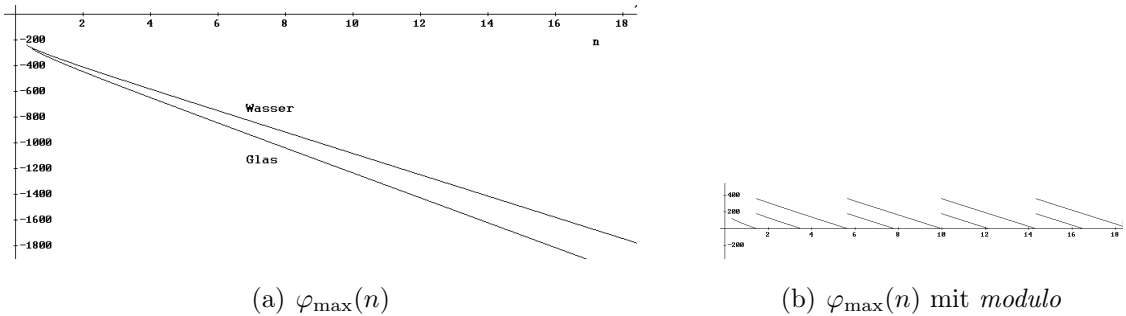


Abbildung 12: Man erkennt den starken Asymptotencharakter der Funktion für viele der interessierenden Werte von n .

Es ist günstiger, wenn die Wertemenge von φ_{\max} auf 0 bis 180° beschränkt wird, was nichts anderes bedeutet, als dass man nun die Funktion $|\varphi_{\max} \bmod 180^\circ|$ betrachtet. Das heißt, dass man lediglich die obere oder untere Hälfte des Regentropfens sieht. Es lässt sich also unterscheiden, ob der jeweilige Regenbogen zur Sonne hin oder von der Sonne weg geht.

Den asymptotischen Charakter der Funktion (vgl. Abb. 12(a)) ist schnell nachgewiesen. Dazu betrachtet man das Verhalten von $\varphi_{\max}(n)$ im Unendlichen. Die Wurzeln gehen für $n \rightarrow \infty$ gegen 1. Für $\arcsin \frac{1}{\nu}$, den Winkel der Totalreflexion, schreibe man r_{total} . Somit vereinfacht sich die Formel im Unendlichen auf

$$\varphi_{\max, \infty} = 180(1 - n) + 2(n + 1) \cdot r_{\text{total}} - 2 \cdot \arcsin 1.$$

$\arcsin 1$ ist 90° . Nach Umordnung der Terme nach n steht da die Asymptotengleichung:

$$\varphi_{\max, \text{asympt}} = n \cdot (2 \cdot r_{\text{total}} - 180) + 2 \cdot r_{\text{total}}$$

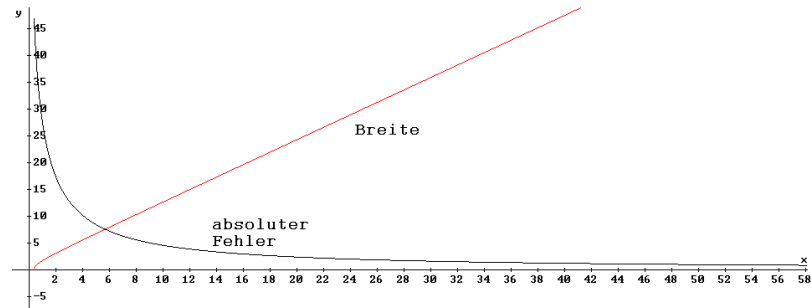


Abbildung 13: Der absolute Fehler bei Verwendung der Asymptote statt der eigentlichen Funktion (für Wasser)

Für welche n kann man diese denn nun verwenden, ohne dass der Fehler groß wird? In Abb. 13 ist der absolute Fehler aufgetragen, der entsteht, wenn man für die Wasser-Regenbögen statt der echten Funktion die Asymptote verwendet. Gleichzeitig stellt die andere Kurve die rechnerische Breite des Spektrums dar⁸. Man sieht, dass etwa ab dem 6. Regenbogen der absolute Fehler unter die Breite des Bogens fällt.

Die Intensität des ausfallenden Lichtes (bei Wasser) ist auf Abb. 14 dargestellt. Die verwendeten Computerprogramme werden erst später ausführlich vorgestellt, hier

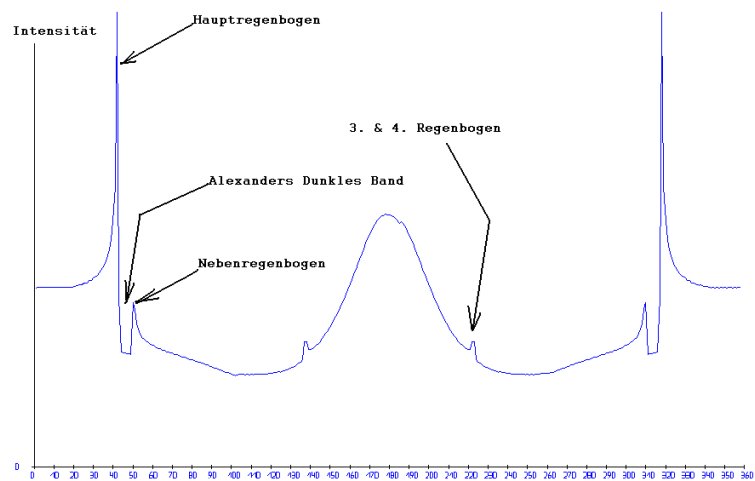


Abbildung 14: Intensität des ausfallenden Lichts (bei einem Wassertropfen)

sei genug zu erwähnen, dass der Computer etwa 50 000 Lichtstrahlen auf einen Tropfen schickt, sie alle bricht und das ausfallende Licht auf einer Art Schirm zusammen

⁸Die einfache Differenz zwischen φ_{\max} für Rot und Blau ist nur in dem Fall die Breite des Bogens, wenn es sich um eine punktförmige Lichtquelle handelt. Andernfalls wird der Bogen breiter, unschärfer.

mit seiner Intensität, die bei jeder Reflexion und jeder Brechung sinkt, registriert. Man erkennt neben den bekannten Maxima bei den Regenbogenwinkeln auch eine dunkle Zone zwischen den beiden Regenbögen, die den Namen Alexanders Dunkles Band zu Ehren von Alexander von Aphrodisias⁹ trägt. Auf dem Titelbild ist das Band recht gut zu erkennen. Ebenda sieht man aber auch, dass die Farbfolge bei den Regenbögen vertauscht ist. Was dies miteinander zu tun hat und wie man z. B. die Farbfolge für einen Regenbogen beliebiger Ordnung voraussagt, ist Thema des übernächsten Abschnitts. Zuerst soll, da das Thema offensichtlich nicht unwichtig ist, die Intensität des Regenbogens untersucht werden.

3.3 Intensität des Regenbogens

Spektren verlassen einen Tropfen an den Stellen, wo geometrische und Intensitätsmaxima vorliegen. Zu erklären, was die beiden miteinander zu tun haben, ist unter anderem das Ziel dieses Abschnitts.

Vorab sei betont, dass Intensitäten grundsätzlich nicht in den Bereich geometrischer Optik fallen, die folgenden Rechnungen können also nur als Schätzungen gedeutet werden. Die korrekten Intensitätsbeziehungen in Form der Fresnel¹⁰'schen Formeln analytisch anzuwenden wäre aber zu aufwendig.

Die Formel wird als Grenzwert dessen hergeleitet, was das Programm macht. Eine Anzahl von N Strahlen schickt es auf den Tropfen mit Radius R , bricht jeden Strahl und zählt die Strahlen ΔN , die pro Winkelement $\Delta\varphi$ angekommen sind. Aus den Strahlen muss eine kontinuierliche Wellenfront gemacht werden, etwa als Energie pro Element Δz (s. Abb. 15). Statt Strahlen zu zählen, berechnet man nun die Energie pro Winkelement, $I \approx \frac{\Delta E}{\Delta\varphi}$, im Grenzübergang $I = \frac{dE}{d\varphi}$. Es gilt:

$$\begin{aligned} dE &= \sigma dz \\ z &= R \sin i \\ dz &= R d(\sin i) \\ I &= \frac{dE}{d\varphi} = \sigma R \frac{d(\sin i)}{d\varphi} = E_0 \frac{d(\sin i)}{d\varphi} \end{aligned}$$

$E_0 = \sigma R$ ist dabei die gesamte auf den (halben) Tropfen fallende Energie und die Intensität hängt tatsächlich nicht vom Tropfenradius ab. Man braucht zur Berechnung von I also die Umkehrfunktion von $\varphi(i)$.

⁹Alexander von Aphrodisias (um 200 n. Chr.), Philosoph und Logiker

¹⁰Augustin Jean Fresnel (1788-1827), franz. Physiker und Ingenieur

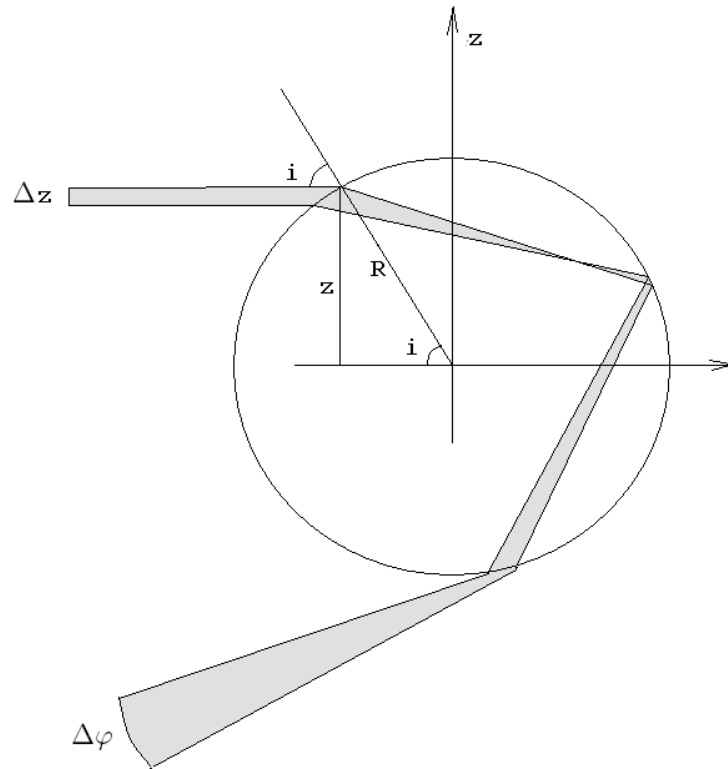


Abbildung 15: Zur Herleitung der Intensität des ausfallenden Lichts

$\varphi = 180 \cdot (1 - n) + 2r(n + 1) - 2i$ nach i aufzulösen ist nicht einfach.

$$\varphi = 180 \cdot (1 - n) + 2r(n + 1) - 2i$$

$$\varphi = 180 \cdot (1 - n) + 2(n + 1) \arcsin\left(\frac{\sin i}{\nu}\right) - 2i$$

$$\varphi + 2i - 180 \cdot (1 - n) = 2(n + 1) \arcsin\left(\frac{\sin i}{\nu}\right)$$

$$\frac{\varphi + 2i - 180 \cdot (1 - n)}{2(n + 1)} = \arcsin\left(\frac{\sin i}{\nu}\right)$$

$$\sin\left(\frac{\varphi + 2i - 180 \cdot (1 - n)}{2(n + 1)}\right) = \frac{\sin i}{\nu}$$

Diese Gleichung zu lösen ist im Allgemeinen recht schwierig. Für $n = 0$ vereinfacht

sie sich aber auf:

$$\begin{aligned}
\sin\left(\frac{\varphi + 2i - 180}{2}\right) &= \frac{\sin i}{\nu} \\
\sin\left(\frac{\varphi}{2} + i - 90\right) &= \frac{\sin i}{\nu} \\
\cos\left(\frac{\varphi}{2} + i\right) &= -\frac{\sin i}{\nu} \\
\cos\frac{\varphi}{2} \cdot \cos i - \sin\frac{\varphi}{2} \cdot \sin i &= -\frac{\sin i}{\nu} \\
\cos\frac{\varphi}{2} \cdot \sqrt{1 - \sin^2 i} &= \sin i \left[\sin\frac{\varphi}{2} - \frac{1}{\nu} \right] \\
\cos^2\frac{\varphi}{2} \cdot (1 - \sin^2 i) &= \sin^2 i \left[\sin\frac{\varphi}{2} - \frac{1}{\nu} \right]^2 \\
\cos^2\frac{\varphi}{2} &= \sin^2 i \underbrace{\left[\left(\sin\frac{\varphi}{2} - \frac{1}{\nu} \right)^2 + \cos^2\frac{\varphi}{2} \right]}_{\sin^2\frac{\varphi}{2} - 2\sin\frac{\varphi}{2}\frac{1}{\nu} + \frac{1}{\nu^2} + \cos^2\frac{\varphi}{2} = 1 - \frac{2}{\nu}\sin\frac{\varphi}{2} + \frac{1}{\nu^2}} \\
\cos^2\frac{\varphi}{2} &= \sin^2 i \left[1 - \frac{2}{\nu}\sin\frac{\varphi}{2} + \frac{1}{\nu^2} \right] \\
\frac{\cos\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{1 - \frac{2}{\nu}\sin\frac{\varphi}{2} + \frac{1}{\nu^2}}} &= \sin i
\end{aligned}$$

Zu bestimmen ist jetzt die Ableitung nach φ . Der Abkürzung wegen gelte im Folgenden: $\sqrt{\dots} := \sqrt{1 - \frac{2}{\nu}\sin\frac{\varphi}{2} + \frac{1}{\nu^2}}$.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\varphi} \sin i &= \frac{-\sqrt{\dots} \cdot \frac{1}{2} \sin(\varphi/2) + \cos(\varphi/2) \cdot \frac{\frac{2}{\nu} \cos(\varphi/2) \cdot \frac{1}{2}}{2\sqrt{\dots}}}{(\sqrt{\dots})^2} \\
\frac{d}{d\varphi} \sin i &= \frac{-\sqrt{\dots} \cdot \frac{\sin(\varphi/2)}{2} + \frac{\cos^2(\varphi/2)}{2\nu\sqrt{\dots}}}{(\sqrt{\dots})^2} = -\frac{\sin(\varphi/2)}{2\sqrt{\dots}} + \frac{\cos^2(\varphi/2)}{2\nu(\sqrt{\dots})^3}
\end{aligned}$$

Diese Rechnung demonstriert sehr deutlich den Rechenaufwand. Das Problem ist, dass Terme der Form $\sin\left(\frac{i}{n+1}\right)$ ab $n = 1$ zu komplizierten Gleichungen führen, die etwa für $n = 1$ vierten Grades in $(\sin i)$ sind. Man muss zudem beachten, dass dabei im Allgemeinen lediglich die Intensität des Lichts nach n Reflexionen berechnet werden kann, die Gesamtintensität ist die Summe über theoretisch unendlich viele Reflexionen. Um realistische Ergebnisse zu erhalten, sollte man mindestens bis zur dritten Ordnung rechnen. Hier wird deutlich, dass man, um die Intensitäten tatsächlich zu berechnen, auf Computerprogramme angewiesen ist. Zudem erlaubt ein Computer-

programm relativ problemlos auch die Fresnel'schen Formeln einzubinden. Aber es lassen sich aus der Intensitätsformel noch andere Aussagen herleiten, die der eigentliche Sinn und Zweck dieses Abschnitts sind.

Bei einer beliebigen Funktion $\varphi(i)$, die an der Stelle i_0 ein Maximum hat, versucht man etwas über die Intensität auszusagen. In Abb. 16 ist eine solche Funktion abgebildet, neben der Umkehrfunktion und deren Ableitung¹¹. Man erkennt, dass

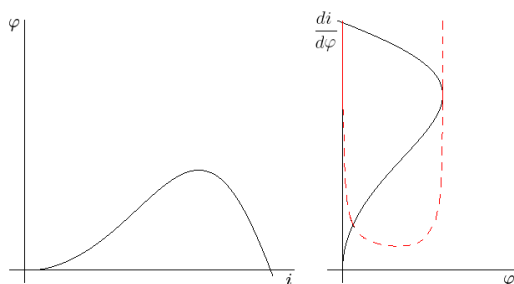


Abbildung 16: Eine Funktion $\varphi(i)$, ihre Umkehrfunktion und deren Ableitung (gestrichelt)

dort, wo $\varphi(i)$ ein Maximum hat, die Ableitung der Umkehrfunktion gegen unendlich strebt. Dort, wo ein geometrisches Maximum existiert, ist zumindest auch ein Maximum der Intensität, auch wenn der physikalisch exakte Wert sicher nicht gegen unendlich streben wird. Hier wirkt sich die Berechnung mithilfe geometrischer Optik aus. Man kann aber nun wenigstens qualitativ verstehen, wie die Intensitätsmaxima zustande kommen und vor allem wann. Letzteres wird spätestens im nächsten Teil bei Regenbögen in Glasrohren von entscheidender Bedeutung sein.

3.4 Folgerungen aus der Theorie

Wo liegen denn die höheren Regenbögen bei Wasser? In Tabelle 0(a) stehen die Winkel, wie sie die Formel „ausspuckt“. Es wäre allerdings sinnvoll, auf Vielfache von 360° zu verzichten. Gleichzeitig wandelt man die negativen Werte in positive um, indem dort zusätzlich Vielfache von 360° hinzu addiert werden. Die neuen Winkel stehen in Tabelle 0(b). Sie müssen nun die vollständige Information darüber enthalten, in welcher Richtung der Regenbogen zu beobachten ist und wie der Strahlengang ist. Um dies festzustellen und die Winkel zu sortieren, eignet sich Tabelle 2.

Dort sind die Winkel nach ihrer Größe in 90° -Abständen sortiert. Unter *Bezugspunkt* ist diejenige Richtung gemeint, in die man schauen muss, um den Regenbogen zu entdecken – es kommen natürlich nur zwei in Frage – Sonne und Sonnengegenpunkt. Manche Regenbögen werden nämlich zurückgestreut und sind zu sehen, wenn

¹¹ $\frac{d}{d\varphi} \sin i = \frac{d}{d\varphi} i \cdot \cos i$, das Verhalten der Ableitung von $\sin i$ wird hauptsächlich durch die Ableitung von $i(\varphi)$ vorgegeben. Man braucht also im Wesentlichen nur sie zu untersuchen.

(a) „reine“ Winkel				(b) mit Verzicht auf Vielfache von 360°			
n	φ_{\max}	n	φ_{\max}	n	φ_{\max}	n	φ_{\max}
1	42,51638172	11	-805,7208847	1	42,51638172	11	274,2791153
2	-50,10124808	12	-888,5379716	2	309,8987519	12	191,4620284
3	-137,1549239	13	-971,3085277	3	222,8450761	13	108,6914723
4	-222,287523	14	-1054,041918	4	137,712477	14	25,95808237
5	-306,5105127	15	-1136,745148	5	53,48948735	15	303,2548517
6	-390,2275691	16	-1219,423567	6	329,7724309	16	220,5764326
7	-473,6332833	17	-1302,081328	7	246,3667167	17	137,9186719
8	-556,8334559	18	-1384,721705	8	163,1665441	18	55,2782955
9	-639,8906929	19	-1467,347313	9	80,10930709	19	332,6526868
10	-722,8444586	20	-1549,96027	10	357,1555414	20	250,0397295

Tabelle 1: Positionen des roten Lichts der ersten 20 Regenbögen für $\nu = 1, 33$ (rotes Licht in Wasser).

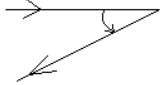
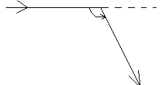

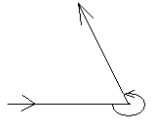
positiv		negativ	
$0^\circ < \varphi < +90^\circ$	$+90^\circ < \varphi < +180^\circ$	$+180^\circ < \varphi < +270^\circ$	$+270^\circ < \varphi < +360^\circ$
Bezug: Sonnengegenpunkt $\varphi' = \varphi$	Bezug: Sonne $\varphi' = 180^\circ - \varphi$	Bezug: Sonne $\varphi' = \varphi - 180^\circ$	Bezug: Sonnengegenpunkt $\varphi' = 360^\circ - \varphi$
			
Maximum Rot außen	Minimum Rot innen	Maximum Rot außen	Minimum Rot innen

Tabelle 2: Sortierung der Winkel

man *von* der Sonne wegblickt (zum Sonnengegenpunkt), und manche werden fast gar nicht abgelenkt, so das man fast *in* die Sonne zu schauen hat. φ' gibt den *Winkelradius* an. Wenn man einen Regenbogen betrachtet, der laut Tabelle unter 191° zu finden ist, und man sich schon zur Sonne hingedreht hat, braucht man statt der Angabe 191° nur noch 11° . Anschaulich ist das eben der Winkelradius des Bogens, wenn man schon in die richtige Richtung schaut (Radius um den Bezugspunkt).

Das Extremum von φ ist immer ein Maximum. Wo gehen aber all diejenigen Strahlen hin, die gerade nicht maximal abgelenkt wurden? Ihre φ sind alle kleiner als das maximale, diese Bereiche sind in den beiden Abbildungen 17(a) und 17(b) gelb markiert. Man sieht, dass im ersten Fall der Kegel mit Licht ausgefüllt ist, während im anderen Fall der Kegel leer ist, während das übrige Licht außen ist. Es sieht so aus, als ob die Strahlen im ersten Fall *maximal* bis φ_{\max} abgelenkt würden, während sie im zweiten Fall *mindestens* um diesen Winkel abgelenkt werden. Der zweite Regenbogen bei Wasser entsteht ungefähr bei diesem Strahlengang. Daher kommt die oft anzutreffende Aussage, beim ersten Regenbogen habe φ ein Maximum und beim zweiten läge ein Minimum vor. Dies ist eine Frage der Definition des Winkels. Wenn



Abbildung 17: Zu Maxima und Minima des Winkelradius

man ihn so definiert, wie hier geschehen, gibt es lediglich ein Maximum. Was zwischen Minima und Maxima wechselt, ist der Winkelradius des Regenbogens. Ein Minimum von φ' gibt es immer dann, wenn φ negativ in die dafür vorgesehene Formel eingeht.

Zudem lässt sich nun anschaulich erklären, warum und wann bei höheren Regenbögen die Farbfolge vertauscht wird, wenn also das Blau außen liegt. Dazu beachte man die Lage der farbigen Punkte auf den Bildern von vorhin. Man braucht nur zu bedenken: Rot wird am stärksten abgelenkt. Alles andere ergibt sich daraus; in Abb. 17(a) ist Rot außen, Blau innen, während in Abb. 17(b) dies umgekehrt ist. Und noch mehr lässt sich aus den Minima und Maxima ableiten: während beim ersten Regenbogen das weiße Licht innerhalb des Bogens ist, ist es im Fall des zweiten (Strahlengang etwa Abb. 17(b)) außen. Da die beiden übereinander stehen, sieht man zwischen den Regenbögen scheinbar einen dunklen Streifen, etwas, was schon im Intensitätsspektrum zu sehen war, und nun anhand des geometrischen Maximums besser verstanden werden kann. Was man da sieht, ist natürlich die echte Helligkeit des Himmels. Im Kontrast zu den Helligkeiten der Regenbögen erscheint der Bereich aber dunkel.

Die starke Abhängigkeit der Bögen vom Brechungsindex gibt eine nützliche Anwendung: anhand der Positionen lässt sich der Brechungsindex mit hoher Genauigkeit bestimmen. Man betrachte dazu Abb. 18. Man sieht, dass je größer n , umso stärker die Verschiebung bei auch nur kleinen Änderungen von ν ist. Dies ist eine sehr wichtige Anwendung, denn insbesondere mit den höheren Regenbögen lässt sich eine große Genauigkeit erreichen, ohne dass die Anforderungen an die Genauigkeit der Winkelvermessung auch nur vergleichbar wären. Eine experimentelle Umsetzung dieser Vorhersage ist Thema des nächsten Abschnitts.

Man betrachte aber zuerst noch einmal den Verlauf der Positionen der Regenbögen beim Wassertropfen. Normalerweise ist es ein „buntes Durcheinander“, aber nicht so bei einem Brechungsindex von $\sqrt{2}$: Anfängliche Isotropie mündet in ganz klaren Vorzugsrichtungen, die asymptotischen Charakter haben. Der Beweis für dieses sonderbare Verhalten läuft über die Betrachtung der Asymptotengleichung, mit *mod*

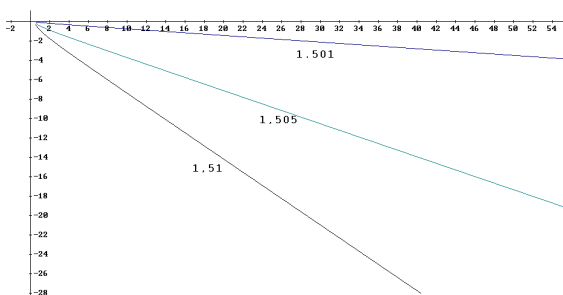


Abbildung 18: Der Unterschied in der Position der höheren Regenbögen, wenn der Brechungsindex nicht 1,5, sondern 1,51, 1,505 und 1,501 beträgt.

180 versehen. Dabei betrachtet man, wie viele Abschnitte der Funktion in wie viele n auf der x-Achse passen. Man fordert nämlich, dass eine möglichst kleine, aber ganze, Zahl von n in den Bereich passt, wo die Funktion von 0 auf 180 geht. Diese Zahl sei Δn .

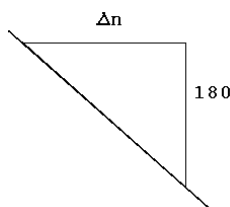


Abbildung 19: Man beachte, dass die Asymptote negative Steigung hat.

Aus der Abbildung ist abzulesen, dass $-\frac{180}{\Delta n} = 2 \cdot r_{\text{total}} - 180$, daraus $2 \cdot r_{\text{total}} = 180 \left(1 - \frac{1}{\Delta n}\right)$ oder $r_{\text{total}} = 90 \left(1 - \frac{1}{\Delta n}\right)$ bzw. $\frac{1}{\nu} = \sin \left[90 \left(1 - \frac{1}{\Delta n}\right)\right]$.

Für $\Delta n = 1$ erhält man somit kein sinnvolles Ergebnis, aber für $\Delta n = 2$: $\frac{1}{\nu} = \sin \left[90 \left(1 - \frac{1}{2}\right)\right] = \sin [45] = \frac{1}{\sqrt{2}}$, daraus $\nu = \sqrt{2}$.

Natürlich gibt es noch weitere Lösungen für größere Δn , doch war man an der kleinstmöglichen interessiert. Das asymptotische Annähern kommt dadurch hinzu, dass hier schon die Asymptote verwendet wird.

3.5 Regenbögen im Labor

Um höhere Regenbögen beobachten zu können, musste man dafür sorgen, dass auch lichtschwache Bögen noch untersucht werden konnten. Regentropfen waren zu unsicher in der Handhabung, also fiel die Entscheidung zugunsten von Glasstäben aus. Die Regenbögen sind dann wegen veränderter Symmetrie auch keine Kreise mehr, sondern Geraden, eine auf jeder Seite symmetrisch um den Lichteinfall parallel zum Glasstab. Solche Glasstäbe werden *en masse* in der Chemie als Rührstäbe verwendet. Eins der verwendeten Stäbe stammte auch von dort, die Befürchtungen, dass seine optischen Eigenschaften noch Wünsche offen lassen würden, bewahrheiteten sich zum Glück nicht.

Da jeder Regenbogen nur noch wenige Prozent der Intensität seines Vorgängers hat, ist es nicht sinnvoll, die „Bögen“ auf einen Schirm fallen zu lassen. Stattdessen ist es praktischer, direkt *in* die Spektren zu blicken. Dabei sieht man natürlich (bis auf Ausnahmen¹²) keine vollständigen Spektren, sondern immer nur einen Farbbereich, einen farbigen Streifen meist am rechten oder linken Rand des Stabes. Da später im Experiment die Winkel vermessen werden sollten, unter denen Regenbögen beobachtet wurden, musste eine Zuordnung der Spektren erfolgen. Anhaltspunkte dafür sind nicht nur die Intensität, die oft irreführend sein kann, sondern eben die Frage, ob der Regenbogen links oder rechts am Glasstab gesehen wird. Dies lässt sich mit einer kleinen Rechnung voraussagen. Zur Erläuterung dient Abb. 20. Abgesehen von

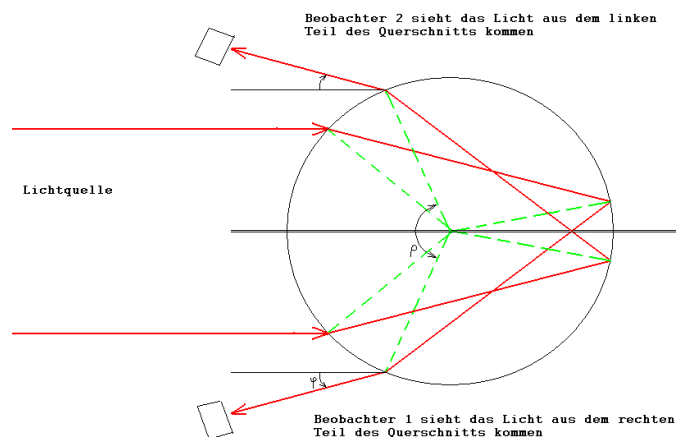


Abbildung 20: Bei der Bestimmung, ob das Spektrum rechts oder links zu sehen sein wird, spielt nicht nur der Winkel eine Rolle, sondern der tatsächliche Ort, an dem das Spektrum den Glasstab verlässt. Dieser wird mit ρ in die Rechnung hinein genommen.

Fallunterscheidungen vergleicht man ρ mit φ . Zu beachten gilt auch noch, dass ein Bogen, der auf der einen Seite als von rechts kommend gesehen wird, auf der anderen Seite links ist, und andersherum, was aus der Abbildung oben ebenfalls abzulesen ist.

Das Medium – also der Glasstab – musste beleuchtet werden, und zwar mit möglichst parallelem und möglichst intensivem Licht. Scheinbar eine hervorragende Anwendung für einen Laser. Aber aus mehreren Gründen mussten herkömmliche Lichtquellen verwendet werden: Die meisten Laser, die man bekommt, sind im mW-Bereich und damit trotz großer Intensität viel zu schwach. Und alles andere ist extrem gefährlich, denn man muss bedenken, dass man während der Beobachtung auch schon mal fast direkt ins Licht schaut. Das beste Beobachtungsinstrument ist nämlich immer noch das menschliche Auge. Zudem ist Laserlicht in hohem Maße monochromatisch, so dass man bei der Beobachtung auf Intensitäten achten müsste und nicht farbig zwischen Spiegelung und echtem Spektrum unterscheiden könnte.

Meist bedeuten Gewinne in der Lichtintensität bei der Verwendung einer Glühbir-

¹²etwa Glasfehler

ne aber einen Mangel an Parallelität, und anders herum. Die übliche Methode ist, durch eine möglichst kleine Lochblende eine im Brennpunkt einer Linse stehende punktförmige Lichtquelle zu simulieren. Durch die Blende kommt es aber zu Einbußen bei der durchkommenden Intensität. Man muss eben einen Kompromiss schließen. Die beste Lichtquelle, die gefunden werden konnte, und oft verwendet worden ist, ist ein Tageslichtprojektor (OHP), aus dessen Licht nur die gerade verlaufenden Strahlen durch eine im Fokus einer Sammellinse stehende Blende hindurchkommen und anschließend durch eine Konkavlinse wieder parallel gemacht werden (Abb. 21).

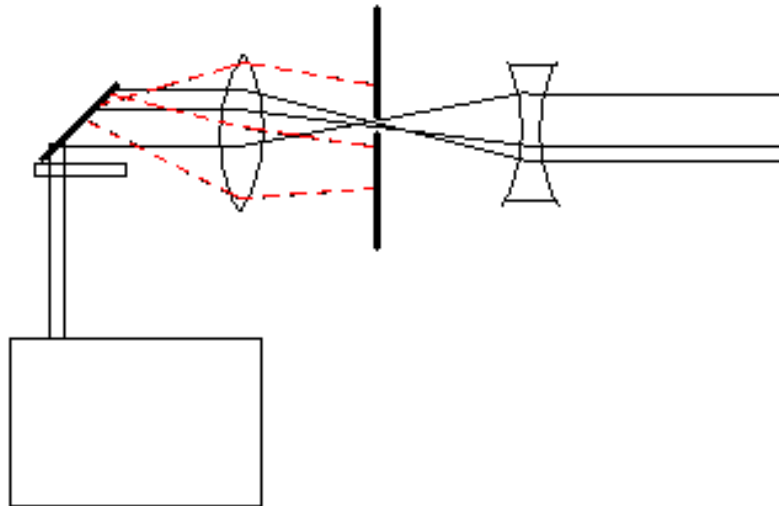


Abbildung 21: Der Aufbau, um paralleles Licht zu bekommen.

Während in ein Spektrum hineingeblickt wird, muss gleichzeitig der Winkel zum Lichteinfall vermessen werden können. Dazu wurde eine drehbare Platte entwickelt, auf welcher eine Art Fadenkreuz befestigt war. Wenn man eine Farbe gefunden hatte, drehte man das Fadenkreuz passend, und konnte aus der Position der gesamten Platte und der Richtung des Lichteinfalls den Winkel errechnen. Später wurde das Fadenkreuz durch eine Lupe ergänzt, durch die man die Regenbögen beobachtete (allerdings muss man mit Lupen vorsichtig sein, da sie, wenn sie falsch befestigt sind, die Winkel verschieben). Die Platte selbst wurde mit zwei Schrauben an dem Mittelstück eines alten Handbohrers festgeschraubt (dort wo sonst die Kurbel saß). Der „Bohrer“ selbst wurde in einem Schraubstock festgeklemmt. Die Platte besaß einen Zeiger, welcher über der Tischplatte auf einer Skala das Ablesen des Winkels ermöglichte.

Dieser Aufbau besaß eine Genauigkeit von einem Grad – und lieferte eine Genauigkeit von $\pm 0,001^\circ$ bei der Brechzahl, wenn man Bögen von etwa 10.-15. Ordnung vermaß. Das ist eine Genauigkeit, deren Steigerung normalerweise gar nicht gebraucht wird.

Wenn man dies trotzdem für nötig erachtet, kommen einige Probleme auf,

deren Lösung nicht immer ganz simpel ist. Das erste Problem ist die Brechzahl der Luft, deren 4. Nachkommastelle nicht mehr Null ist. Man müsste also den Versuch im Vakuum oder in einer Schutzatmosphäre aus einem Gas bekannter Brechzahl machen. Da sich diese aber mit der Temperatur usw. ändert, erscheint es günstiger, ein Vakuum zu verwenden, das auch gar nicht so gut sein muss. Hauptsache ist, dass es den Beginn von Null verschiedener Ziffern um eine paar Stellen nach hinten verschiebt.

Der Winkel wurde zunächst immer in Bezug auf den Lichteinfall gemessen. Um diese Unsicherheit aus dem Weg zu räumen, wurden nicht mehr direkt die Winkel, sondern nur noch Winkeldifferenzen gemessen, und aus ihnen auf die Brechzahl geschlossen. Auch die Platte wurde über einen Schrittmotor bewegt, was ein Ablesen nicht mehr notwendig machte. Aus der Anzahl Schritte konnte immer auf den gefahrenen Winkel schließen. Es musste auch nicht mehr angepeilt anpeilen: eine auf der Platte montierte Webcam liefert das beobachtete Bild an den Computer.

Eine weitere Fehlerquelle ist eine falsche Positionierung des Mediums: Es könnte nämlich leicht schief oder leicht nicht-koaxial mit der Platte aufgestellt sein. Da dies auf zufällige Weise geschieht, muss man hier zu Mitteln der Fehlerrechnung greifen.

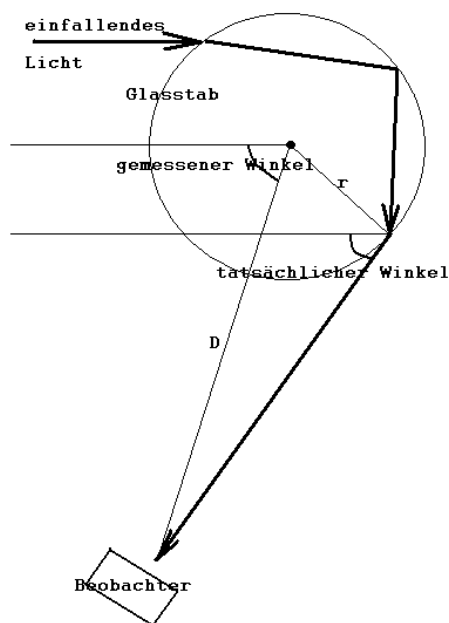


Abbildung 22: Zur Positionierung des Stabes. Der tatsächlich gesuchte Winkel ist nicht ganz der, den man vermisst.

Ein systematischer Fehler unterläuft allerdings immer noch. Es ist nämlich überhaupt nicht günstig, den Stab koaxial mit der Achse aufzustellen. Man betrachte dazu die Abb. 22. Es wäre sinnvoll, denjenigen Punkt koaxial mit der Platte aufzustellen, wo das Spektrum den Stab verlässt. Während des Experiments weiß man dies aber nie. Es scheint, als habe man in den Rechnungen eine Variable, über die

man nichts weiß. Aber trotzdem kann man aus dem beobachteten Winkel alles nötige bestimmen. Vorher wurde aus dem beobachteten Winkel numerisch die Brechzahl berechnet – denn der Winkel ist eine Funktion der Brechzahl und der Ordnung. Nun gibt es zwei Funktionen: den gesuchten Winkel und die Position (etwa als ρ (s.o.)), und sie beide hängen wieder vom Brechungsindex und der Ordnung ab. Wenn durch sie der gemessene Winkel ausgedrückt werden kann, wird es möglich, wieder genauso numerisch auf die Brechzahl zu schließen. Man wird zwar immer noch nicht wissen, wo das Spektrum den Stab verlässt, aber letztlich interessiert das auch nicht. Diese Funktion, deren Herleitung prima mit dem Sinussatz funktioniert, ist (wenn man den gemessenen Winkel als φ_1 bezeichnet):

$$\varphi_1 = \varphi + \arcsin\left(\sin(\rho - \varphi) \cdot \frac{r}{D}\right)$$

$\frac{r}{D}$ ist dabei das Verhältnis aus äußerem Radius und dem Abstand Achse-Beobachter. Allerdings konnte D nicht sehr genau gemessen werden. Wegen der Kamera gab es da einen geschätzten Fehler von einem halben cm, was wieder einer Genauigkeit von einem Grad bei der Winkelvermessung entsprach.

Die Anzahl der gesehenen Regenbögen hängt aus verständlichen Gründen stark davon ab, welche Lichtquelle man verwendet. Je stärker diese ist, umso mehr Bögen sieht man. Regenbögen, die man von der Lichtquelle weg schauend sieht, sind meist besser auszumachen, als diejenigen, die wenig aus der Ursprungsrichtung abgelenkt wurden und somit in Richtung der Lichtquelle zu erblicken sind. Man ist bei Messungen also praktisch auf eine Hälfte der möglichen Bögen begrenzt. Dies ist zwar nicht schön und ärgert den Experimentierenden sehr, lässt sich aber nur schlecht umgehen. [12] schlägt z. B. vor, einen Teil des einfallenden Lichts abzudecken, und zwar jenen Teil, der zwar für die Spiegelung, aber nicht für den Regenbogen verantwortlich ist. Dies ist allerdings nicht immer möglich.

Weitere Schwierigkeiten bietet die Zuordnung der gesehenen Spektren. Da sich die Winkel blitzschnell mit dem Brechungsindex verschieben können, muss man, wenn man nicht aus anderen Quellen die ungefähre Größenordnung¹³ der Brechzahl kennt, aus der Position des ersten Bogens diese errechnen. Er ist in den allermeisten Fällen einfach der hellste, doch gibt es Stoffe, die keinen ersten ausbilden können, weil der Brechungsindex zu groß ist. Diesen Sonderfall gibt es bei Glas nicht, und auch bei vielen kristallinen Metallsalzen ist dies nicht der Fall. Wenn die Größenordnung bekannt ist, sollte man sich vorher überlegen, welches Spektrum in etwa wo zu sehen sein wird. Weitere Hinweise liefert dann die Links-Rechts-Zuordnung und die Abfolge der Farben. Die Berechnung all dieser Angaben ist relativ mühselig, so dass man sie gut dem Computer überlassen kann.

¹³Mit Größenordnung ist hier die erste Nachkommastelle gemeint.

Die Brechzahl ändert sich mit der Farbe, so dass man sich auf eine Farbe festlegen sollte. Da kein Spektroskop mit einer Skala zur Verfügung stand, beschränkten sich die hier beschriebenen Messungen auf das äußerste rote Licht.

Nachdem zuerst die Richtigkeit der Voraussagen an einem Glasstab bekannter Brechzahl überprüft worden war, wurde die Brechzahl eines Rührstabes aus der Chemie bestimmt. Man sah bei diesem Glas meist etwa 6-8 Bögen, und eindeutig für das äußerste rote Licht vermessen werden konnten meist nur die Regenbögen 2., 4., 5., 8., 9., 13. und 15. Ordnung. Wie gut man misst, stellt man ungefähr an der Streuung der Brechzahlen fest, allerdings muss man immer beachten, dass die verschiedenen Ergebnisse unterschiedliche Gewichtung haben. Besonders der erste, sehr intensive Bogen ist oft schlecht gemessen, da er sehr hell ist und man nicht immer gut erkennt, wo das Rot aufhört. Tabelle 3 zeigt die Ergebnisse zweier Messungen.

beobachtete Ordg.	Brechzahl (1. Messg.)	Brechzahl (2. Messg.)
1	–	1,472
2	1,506	1,504
4	1,506	1,505
5	1,509	1,51
8	1,510	1,507
9	1,506	1,503
13	–	1,502
15	1,505	1,505
19	–	1,507

Tabelle 3: Zwei Beispielmessungen.

Beim 15. Bogen ist die Ungenauigkeit von ν etwa $\pm 0,001$, bei dem zweiten Bogen aber $\pm 0,01$, das Zehnfache. Wenn man diese Toleranzen einbezieht, kann man kaum eine Messung als absolut falsch ausschließen. Die höheren Bögen liefern viel genauere Ergebnisse.

Weitere Messungen bestätigten, dass das äußere Rot einen Brechungsindex von $(1,505 \pm 0,001)$ in diesem Glas hat. Dieser Fehler entspricht weniger als einem Zehntel der Breite des Spektrums, wenn man annimmt, dass die Brechzahl sich um etwas mehr als 0,02 von Rot nach Blau ändert. Das Ablesen auf 1° genau liefert also gute Ergebnisse, wenn man bedenkt, dass für sie noch der alte Aufbau verwendet worden war und mit bloßem Auge beobachtet und angepeilt werden musste.

3.6 Zusammenfassung

Ausschlaggebend für die *Regenbögen* ist ein Maximum des ausfallenden Lichts, an welchem die Spektralkomponenten sich nicht überlagern können und ein Spektrum den Tropfen verlässt. Die Gesamterscheinung entsteht durch das Zusammenkommen

vieler Spektren im Auge des Beobachters, wobei dann bestimmte Bereiche der Regenwand bunt, andere eher hell und andere wiederum eher dunkel erscheinen.

Ausschlaggebend für die *höheren Ordnungen* ist das Verhalten des Lichts im Tropfen. Jede Reflexion verändert die Lage des Maximums, so dass man nicht von einem Regenbogen sprechen darf, sondern von theoretisch unbeschränkt vielen. Da bei jedem Auftreffen des im Tropfen befindlichen Lichtstrahls auf die Grenzfläche Tropfen-Luft ein Teil des Lichts den Tropfen (als Regenbogen?) verlässt, bleibt immer weniger für die noch höheren Ordnungen übrig, so dass deren Intensität rapide fällt.

Die geometrische Berechnung des Maximums zeigte eine Anwendung insbesondere der höheren Regenbögen auf, die auch durchgeführt wurde. Allerdings ist die Lage der zu vermessenden Winkel von der Qualität des Glases und vor allem der Form des Stabes abhängig. Um eine Probe anhand der Brechzahl zu identifizieren, oder einfach nur deren Brechzahl zu bestimmen, müsste man erst einen Stab herstellen. Es ist möglich, das vorgestellte Verfahren auch auf andere Querschnitte auszudehnen, allerdings bleibt das Problem immer noch, dass man die Art des Querschnitts der vorliegenden Probe kennen muss.

Eine bessere Anwendungsmöglichkeit bietet sich bei der Vermessung der Brechzahlen von Flüssigkeiten an, etwa wenn man diese in ein Gefäß einfüllt. Das nächste Kapitel behandelt Regenbögen (höherer Ordnungen) in Glasrohren. Durch die veränderte Geometrie gibt es dort viel Neues zu besprechen. Deswegen wird es dort nicht wieder solch eine Gesamtdarstellung vom Strahlengang bis zur Gesamterscheinung, wie es in diesem Kapitel der Fall war, geben. Vielmehr wird unter Verwendung von Begriffen und Vorstellungen aus diesem Kapitel versucht, ein Gesamtbild nur des Strahlengangs in einem Rohr vorzustellen.

4 Regenbögen in Glasrohren

4.1 Grundsätzliche Strahlengänge in einem Rohr

Ein Rohr ist im Hinblick auf die verschiedenen Möglichkeiten für Lichtwege ein un-
gemein komplizierteres Gebilde, als der Vollstab. Der zunächst untersuchte Strahlen-
gang stellt eine naheliegende Anpassung des Strahlengangs in Vollstäben dar. Dabei
finden die Reflexionen im (etwa mit einer Flüssigkeit gefüllten) Inneren des Rohres
statt. Der einfallende Strahl muss dafür die Wand durchdringen. Genau um diesen
zusätzlichen Weg muss man die sonst gleich bleibende Formel dann nur noch ergänzen.

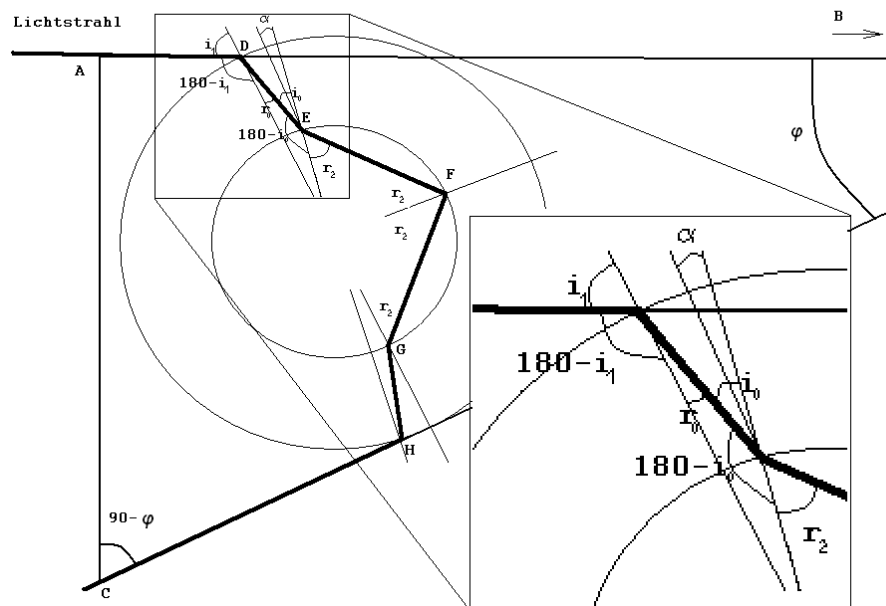


Abbildung 23: Zur Berechnung von φ der Strahlengang im Rohr für den ersten Regenbogen.

Aus der Abbildung erkennt man, dass, wenn man den Strahlengang geschickt
zu dem Polygon ADEFGHC ergänzt und den Winkel oben links auf 90° setzt, man
die nötigen Beziehungen wieder aus der Innenwinkelsumme bestimmen kann. $90 - \varphi$
entsteht dabei aus dem in analoger Weise konstruierten Dreieck ABC. Alle Winkel
außerhalb des Rohrs bekommen den Index 1, alle Winkel innerhalb des Rohrinne-
ren bekommen den Index 2, alle Winkel in der Wand den Index 0, weil die Wand
nur eine Zwischenstation darstellt - eigentlich geht der Lichtstrahl dann von 1 nach
2. Somit liegt ein $(6 + n)$ -Eck vor, mit 2 Ecken mehr als beim Vollstab. Die je-
weils symmetrischen Winkel beim Durchgang durch die Wand sind aber in beiden
Fällen wieder die gleichen. Bei jeder Reflexion (in der Abbildung ist lediglich die
erste aufgezeichnet) beträgt der Winkel jeweils $2r_2$. Zusammengesetzt ergibt das
 $180(4 + n) = 90 + 90 - \varphi + 2 \cdot (180 - i_1 + r_0 + 180 - i_0 + r_2) + n \cdot 2r_2$. Nach φ

aufgelöst : $\varphi = 180(1 - n) - 2i_1 + 2r_0 - 2i_0 + 2r_2 + 2nr_2$. i_0 lässt sich schreiben als $r_0 + \alpha$. Daraus:

$$\varphi = 180(1 - n) - 2i_1 + 2r_2(1 + n) - 2\alpha$$

Wie groß ist α ? 2 Seiten, 1 Winkel \rightarrow Sinussatz!

$$\frac{\sin(r_0 + \alpha)}{\sin r_0} = \frac{R_1}{R_2}$$

$$\text{Zur Abkürzung: } \frac{R_1}{R_2} = 1 + \frac{D}{R_2} \equiv R$$

$$\begin{aligned} \sin(r_0 + \alpha) &= R \sin r_0 \\ \alpha &= \arcsin(R \sin r_0) - r_0 \end{aligned}$$

Unter Anwendung des Additionstheorems für arcsin kann man zeigen, dass auch $\sin \alpha = \sin r_0 \left(\cos r_0 R - \sqrt{1 - R^2 \sin^2 r_0} \right)$ gilt. Mit dem ersteren Ausdruck kann man aber deutlich besser umgehen.

Nun ist r_0 eine Funktion von i_1, r_2 analog eine Funktion von i_0 , welche ihrerseits indirekt über α und auch noch direkt von r_0 abhängt. Diese schwierige Verkettung weiter zu untersuchen erscheint utopisch, weil die Ableitung viel zu lang ist, als dass es noch möglich wäre, diese übersichtlich zu halten, und die Nullstelle derselbigen herauszufinden kaum möglich erscheint. Übrigens enthält die Formel für Rohre auch die Formel für Vollstäbe als Sonderfall bei $R = 1$ und $\alpha = 0$. Damit ist r_2 dann eine direkte Funktion von i_1 .

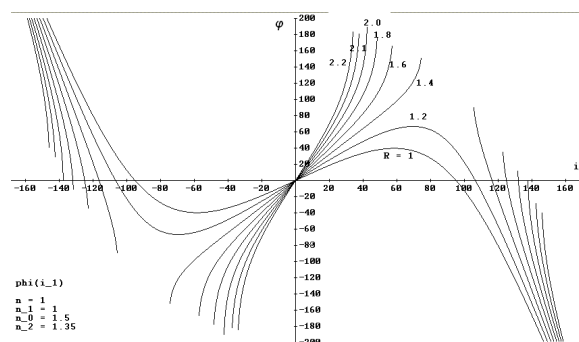


Abbildung 24: Man erkennt das Fehlen der Nullstelle der Ableitung bei einem zu großen R

Man ist gezwungen, lediglich die maximumsbildende Funktion zu betrachten. Sie hat für bestimmte Werte tatsächlich ein analog geformtes Maximum (vgl. Abb.

24). Allerdings ist sie auch bei manchen Werten von R und n_1, n_0, n_2 nicht vollständig definiert und bildet kein Maximum aus, bei dem die Ableitung Null wäre (Abb. 24). Die Begründung, warum manche Inzidenzstrahlen einfach nicht ankommen, ist mathematisch teilweise recht einfach zu erklären: ein Radikand wird negativ. Doch was bedeutet dies für die Strahlen? Wo gehen sie hin? Hier wird auf geometrischem Wege deutlich, dass es noch andere Strahlengänge geben muss.



Abbildung 25: Geometrie der Strahlengänge in einem Rohr

Man kann das Negativ-Werden des Radikanden ausnutzen, um die Bedingung zu bestimmen. Eine geometrische Argumentation ist aber anschaulicher. Man betrachte hierfür Abb. 25(a). Es wird angenommen, dass es einen Strahlengang gibt, bei dem einer der Lichtstrahlen tangential zum Inneren des Rohrs verläuft. Das würde bedeuten, dass mindestens er nicht in die Flüssigkeit taucht und somit gar nicht im betrachteten Strahlengang auftauchen kann. Das würde die Definitionslücke bei φ erklären. In dem (rechtwinkligen) Dreieck gilt: $\sin r_0 = \frac{r_2}{r_1} = \frac{1}{R}$. Dabei kann $\sin r_0$ aber nicht alle Werte annehmen: $\sin r_0 \leq \frac{n_1}{n_0}$. Eingesetzt liefert das $\frac{1}{R} \leq \frac{n_1}{n_0}$ oder $R \geq \frac{n_0}{n_1} \approx n_0$. Dabei fällt auf, dass bei dieser Bedingung ein Verhältnis von Radien mit einem Verhältnis von Brechzahlen verglichen wird.

Es ist durchaus möglich, dass es mehrere Strahlen gibt, die dann nicht nur tangential zum Inneren des Rohres verlaufen, sondern dieses gar nicht berühren. Einmal vorbeigegangen, ist der Lichtstrahl bei diesem Strahlengang in der Lage, wenn er nicht austritt, auch Reflexionen höherer Ordnung zu erfahren – analog denen im Vollstab. Diese Strahlen werden weiter als *vorbeigehende* bezeichnet, wobei immer gemeint ist, dass sie am *Rohrinneren* vorbeigehen..

Dieser Strahlengang ist aber nicht ausreichend, um die Lücke im Definitionsbereich zu erklären. Anhand der Funktion wurde festgestellt, dass immer, wenn die Möglichkeit dafür gegeben war, dass der Strahl an der Grenzfläche Glas-Flüssigkeit totalreflektiert werden konnte, die Lücke noch größer war. Tatsächlich würden die Strahlen mit fortschreitendem i_1 zuerst totalreflektiert und erst später so gebrochen,

dass sie am Inneren vorbeigehen.

Hier bietet es sich wieder an, geometrisch zu argumentieren (Abb. 25(b)). Der Sinussatz liefert, wie schon oben:

$$\frac{\sin(180 - i_0)}{\sin r_0} = \frac{r_1}{r_2} = R$$

$$\frac{\sin i_0}{\sin r_0} = R$$

$$\sin i_0 = R \sin r_0$$

$$\sin i_0 > \frac{n_2}{n_0}$$

$$\sin r_0 < \frac{n_1}{n_0}$$

$$\frac{n_2}{n_0} < \sin i_0 = R \sin r_0 < R \frac{n_1}{n_0}$$

$$\frac{n_2}{n_0} < R \frac{n_1}{n_0}$$

$$R > \frac{n_2}{n_1} \approx n_2$$

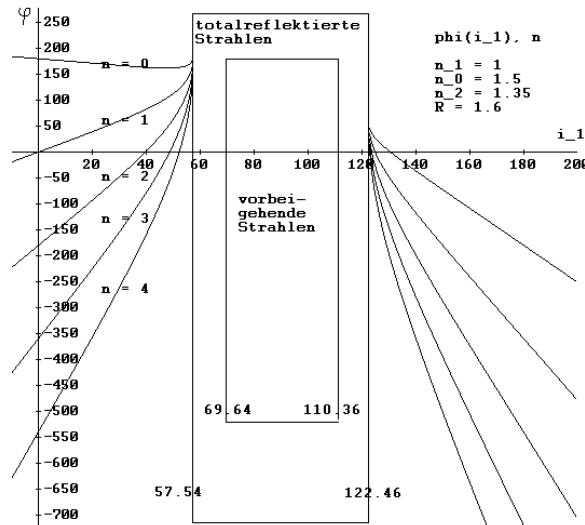


Abbildung 26: In einem Diagramm für $\varphi(i_1)$ mit verschiedenen n sind zusätzlich auch die Bereiche eingetragen, in denen die Strahlen totalreflektiert wurden bzw. am Inneren des Rohres vorbeigegangen sind. Dass beide Typen von Strahlen vorkommen, liegt daran, dass R größer als beide Brechzahlen sind.

Eine wichtige Folgerung ist also: sobald R , das Verhältnis der Radien, größer wird, als eine der Brechzahlen, gibt es Lücken in der maximumsbildenden Funktion. Dabei werden diese Definitionslücken begrenzt durch die Bedingungen $\sin i_1 > \frac{1}{R} \frac{n_2}{n_1}$ bei Lücken durch Totalreflexion und durch $\sin i_1 > \frac{1}{R} \frac{n_0}{n_1}$ bei am Inneren vorbeigehenden Lichtstrahlen (vgl. Abb. 26). Man beachte, dass eine Veränderung der Brechzahl

der Flüssigkeit keine Auswirkungen auf die vorbeigehenden Lichtstrahlen hat, ebenso wie eine Veränderung der Brechzahl des Glases bei totalreflektierten (!). Da die Definitionslücken meist aus Strahlen beider Sorten bestehen, stellt sich diese letztere Unabhängigkeit im Graphen dadurch dar, dass Strahlen, die vorher totalreflektiert wurden, jetzt zu den vorbeilaufenden gehören, ohne dass sich die Lücke insgesamt vergrößert hätte. Einen Haken gibt es an der Sache aber trotzdem: man darf die Brechzahlen nur innerhalb gewisser Grenzen beliebig groß oder klein wählen. Man stelle sich nämlich vor, R sei größer als beide Brechzahlen. Nun kann man eine Brechzahl solange vergrößern, bis sie größer als R ist, so dass die gesamte Lücke sich verkleinern wird. Man darf also die in der jeweiligen Formel nicht vorkommenden Brechzahlen verändern, aber auch der Gültigkeitsbereich dieser Formel hängt von eben diesen Brechzahlen ab.

Zwei Beispiele: Brechzahl des Rohrinne: 1,33; Brechzahl des Glases: 1,5; Brechzahl der Umgebung: 1. Wenn R kleiner als 1,33 ist, gibt es keine Definitionslücken. Sobald R den Wert 1,33 überschreitet, gibt es totalreflektierte Strahlen, bei $R > 1,5$ gibt es *zusätzlich* auch noch vorbeigehende Strahlen. Man kann auch eine Definitionslücke erzeugen, die ausschließlich durch vorbeigehende Strahlen gebildet wird. Dafür muss die Brechzahl des Rohrinne größer sein, als die des Glases. Totalreflexion ist dann ausgeschlossen, weil beim Eintritt nie vom optisch dichteren ins optisch dünnere Medium gewechselt wird. (Beim Austritt gelten wegen der Zylindersymmetrie die gleichen Winkel wie beim Eintritt: In runden Querschnitten kommen alle Strahlen, die hineingegangen sind, auch wieder hinaus.)

Bezüglich der Strahlengänge kann man bisher lediglich festhalten, dass es drei verschiedene Grundstrahlengänge gibt, deren Entstehung hier begründet und die Möglichkeiten ihrer Entstehung zum Teil erläutert wurden. Das wäre der vollständig berechnete Strahlengang mit ausschließlich im Inneren stattfindenden Reflexionen, vorbeilaufende Strahlen und Strahlen, die in der Rohrwand reflektiert werden. Totalreflexion ist nicht notwendig, auch eine Teilreflexion ist schon ausreichend. *Grundstrahlengänge* deswegen, weil es möglich ist, Mischformen dieser Strahlengänge zu erzeugen. Dabei können Strahlen in der Rohrwand laufen und an den Grenzflächen immer wieder reflektiert werden. Irgendwann können sie dann in die Flüssigkeit eintauchen, dann wieder in der Wand laufen und womöglich wieder in die Flüssigkeit tauchen, bevor sie dann unter einem Winkel wieder in die Luft austreten, den zu bestimmen es Aufgabe des nächsten Kapitels ist. Allerdings muss vorher Klarheit darüber herrschen, wie diese Mischformen aussehen, wann genau sie entstehen und ob man sie klassifizieren kann.

4.2 Klassifizierung der Strahlengänge

Die am Inneren des Rohres vorbeigehenden Strahlen können weder hinterher irgendwie *ins* Rohrrinnere kommen, noch an irgendwelchen Reflexionen teilnehmen, die an der Grenze zum Inneren stattfinden. Somit ist eigentlich dieser Strahlengang am meisten mit dem von den Vollstäben her bekannten verwandt: Die einzige Variationsmöglichkeit ist die Anzahl der Reflexionen an der Grenzfläche Glas-Luft, also außen. Er ist gewissermaßen abgeschlossen, da es keine Mischformen zwischen ihm und irgendwelchen anderen Grundstrahlengängen geben kann.

Allerdings kann jeder Strahl, der an der Grenzfläche zum Rohrrinneren angekommen ist, in das Innere tauchen oder aber reflektiert werden¹⁴. Ähnlich sieht es an der Grenzfläche Luft-Glas aus.

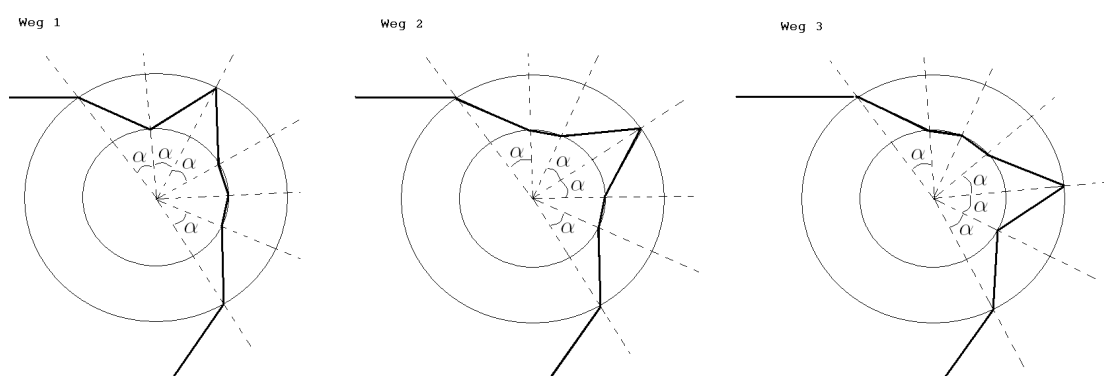


Abbildung 27: Drei äquivalente Strahlengänge.

In dieser ganzen Unmenge der Lichtwege lässt sich aber Ordnung schaffen. Dazu betrachte man die Abbildung 27. Man erkennt, dass es egal ist, ob man Weg 1, Weg 2 oder Weg 3 nimmt, sie sind alle gleich lang und beginnen und enden am gleichen Ort. Da sie beide gleiche Ausfallswinkel zur Folge haben, aber selbst doch nicht gleich sind, sollen sie äquivalente Strahlengänge heißen, jene, die lediglich den gleichen Ausfallswinkel haben. Sie haben untereinander die gleiche Intensität. Gleiche Strahlengänge wären damit auch äquivalent. Es gibt eine einfache Möglichkeit, Lichtwege im Rohr aufzuschreiben. Da darauf im Folgenden gern zurückgegriffen werden wird, sollte man sich mit dieser Kurzschreibweise vertraut machen.

Die Notwendigkeit der Notation ist darin begründet, dass der Begriff *Ordnung* bei Rohren nicht mehr eindeutig ist, da es unklar bleibt, welche Reflexionen dabei gemeint sind. Die Idee ist, den Strahlengang in jene geraden Stücke zu unterteilen, die das Licht zwischen den Reflexionen und Refraktionen zurücklegt. Sie beginnen und enden jeweils an den Grenzen Luft-Glas und Glas-Flüssigkeit. Jedem dieser Teilstücke weist man eine Zahl zu, die genau der schon eingeführten

¹⁴Tatsächlich geschieht natürlich bis auf den Fall, dass eine Totalreflexion der einzige weitere Weg ist, beides gleichzeitig, mit unterschiedlichen Anteilen. Die Bestimmung der Transmissions- bzw. Reflexionskoeffizienten geht aber über den Bereich der geometrischen Optik hinaus.

Indexvereinbarung entspricht: Luft: 1; Glas: 0; Flüssigkeit: 2. Der Strahlengang setzt sich dann aus diesen Stücken zusammen – dabei werden die Ziffern einfach aneinander geschrieben.

Einige Beispiele: 1 0 0 0 1 ist ein am Inneren vorbeigehender Strahlengang mit zwei Reflexionen. Der Strahlengang, wie er im vorigen Kapitel ausführlich berechnet worden ist (Abb. 23), lässt sich durch 1 0 2 2 0 1 abkürzen, wenn es nur eine innere Reflexion gibt und keine einzige in der Rohrwand.

Man muss noch einige Regeln aufstellen, die für einen sinnvollen Lichtweg gelten bzw. gelten müssen:

1. Nur am Anfang und am Ende darf jeweils eine Eins stehen, der Rest ist eine Kombination aus Nullen und Zweien.
2. Die Umkehrung des Weges ist möglich.
3. Gleiche Lichtwege äußern sich in der Gleichheit ihrer Kurzschreibweisen.
4. Von den folgenden Regeln sind am Inneren vorbeigehende Strahlen ausgeschlossen: Wenn im Strahlengang mehrere Nullen hintereinander liegen, so muss gelten: bei Teilwegen wie $1[.0.]2$ oder $2[.0.]1$, wobei $[.0.]$ eine Gruppe von Nullen symbolisiert, muss die Anzahl der Nullen ungerade und mindestens Eins sein. Entsprechend muss bei Strahlengängen $1[.0.]1$ und $2[.0.]2$ diese Anzahl gerade sein und die Mindestanzahl Null. Diese Forderungen ergeben sich aus der Sprungfreiheit des Lichtweges: Um von 1 nach 2 zu kommen, muss man mindestens einmal 0, also die Wand, durchqueren, oder aber einmal durchqueren, reflektiert werden, außen noch einmal reflektiert werden und erst dann in 2 eintauchen, usw. (vgl. Abb. 28).
5. Ohne die Anzahl der Ziffern zu verändern, dürfen die Zweien und *doppelte* Nullen in ihren Positionen getauscht werden. (Dadurch entstehen zueinander äquivalente Strahlengänge.) Man verdeutliche sich das an den oberen Abbildungen! Bei am Inneren vorbeigehenden Strahlen gibt es keine Zweien, deswegen kann da auch nichts Falsches vertauscht werden, allerdings kann die Notation an sich missverstanden werden. Dieses Problem hat zwei Lösungen:
 - a) Man kann sich darauf einigen, die vorbeigehenden Strahlengänge mit einem v zu kennzeichnen.
 - b) Man kann DoppelnulLEN als zusammenhängende Einheit sehen und als solche aufschreiben. Bei den Wegen 1 0 0 0 0 1 und 1 0 00 0 1 wird der Unterschied deutlich. Allerdings ist diese Variante bei Strahlengang 10 01 nicht mehr eindeutig, da die Nullen bei einem in der Wand laufende Strahlengang nicht mehr zusammengezogen werden können. Dies fordert nämlich Punkt 6).
6. Die Anzahl der DoppelnulLEN ergibt eine Art Ordnung, die später in der Rechnung gebraucht wird, dabei allerdings so, dass die begrenzenden Nullen nicht mitgezählt werden: Beim Strahlengang 10 00 01 würde nur eine Reflexion gezählt werden, obwohl es vier Nullen sind!! Entsprechend wird bei 10 01 nullte Ordnung gezählt!! Später wird dies während der entsprechenden Berechnung noch einmal verdeutlicht. Für die vorbeigehenden Strahlengänge wird hier die v -Notation benutzt.

Im Prinzip ist nun Ordnung im Dschungel verschiedenster Strahlengänge geschaffen: Untereinander äquivalente Strahlengänge sind nur durch die *Anzahl* der Zweien und der DoppelnulLEN bestimmt, nicht mehr durch ihre genaue Position im

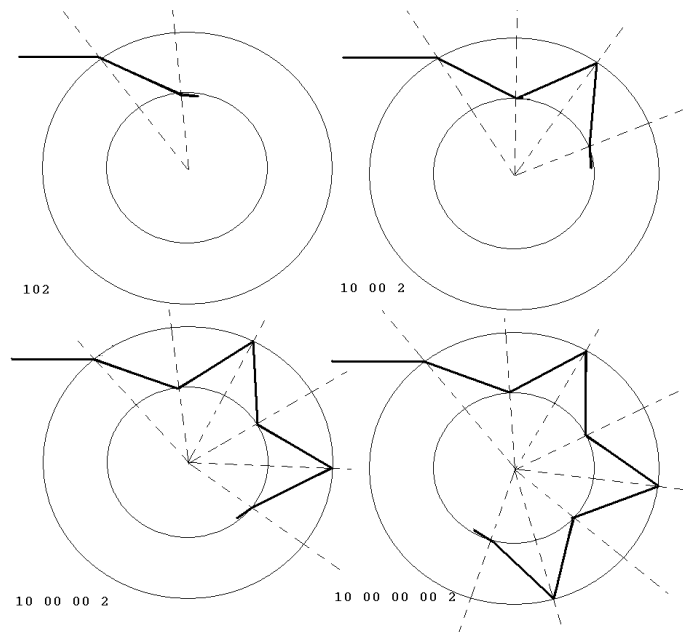


Abbildung 28: Zu Satz 3).

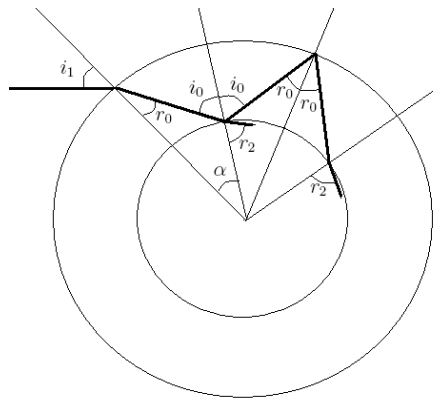


Abbildung 29: Zur Herleitung der Formel.

Strahlengang. Da sie aber gleiche Ausfallswinkel liefern, reicht dies aus. Nun muss die früher hergeleitete Formel um einen Term für die zusätzlichen Reflexionen in der Wand ergänzt werden. Hierzu beachte man entsprechend der Abb. 29, dass

1. jede Reflexion im Rohrinne einen Winkel zum Polygon hinzufügt. Diese Reflexionen werden wie gewohnt mit n bezeichnet, es ergibt sich ein $(6 + n)$ -Eck. Bei Reflexionen in der Wand werden die Doppelnullen in den Kurzschreibweisen jeweils zu einer Einheit zusammengefasst, ihre Anzahl werde mit m bezeichnet. Dann fügt jede dieser Reflexionen zwei Winkel hinzu, damit ergibt sich ein $(6 + n + 2m)$ -Eck.
2. Innere Reflexionen tragen mit $n \cdot 2r_2$ zur Winkelsumme bei, Reflexionen in der Wand mit $(360 - 2i_0) + 2r_0 = 360 + 2(r_0 - i_0)$. Mit der gewohnten Formel $i_0 = r_0 + \alpha$ wird daraus $360 - 2\alpha = 2(180 - \alpha)$.

Zusammensetzen:

$$90 + 2(180 - i_1 + r_0) + 2(180 - i_0 + r_2) + 2n \cdot r_2 + 2(180 - \alpha)m + 90 - \varphi$$

$$= 180(6 + n + 2m - 2)$$

$$90 + 2 \cdot 180 + 2 \cdot 180 + 2 \cdot 180m + 90 - 2i_1 + 2r_0 - 2i_0 + 2r_2 + 2nr_2 - 2\alpha m - \varphi$$

$$= 180 \cdot 4 + 180n + 2 \cdot 180m$$

$$\varphi = 180(1 - n) + 2(-i_1 - \alpha + r_2(1 + n) - \alpha m)$$

$$\varphi = 180(1 - n) + 2(r_2(1 + n) - \alpha(m + 1) - i_1)$$

$$\boxed{\varphi = 180(1 - n) + 2[r_2(1 + n) - \alpha(1 + m) - i_1]} \quad (1)$$

Sonderfall $m = 0$: $\varphi = 180(1 - n) + 2(r_2(1 + n) - \alpha - i_1)$. Diese Formel wurde bereits hergeleitet.

Das Zählen der DoppelnulLEN: Die Kurzschreibweise des Strahlengangs in Abb. 30 ist 10 00 00 01, obwohl sechs Nullen, zählt man doch $m = 2$! Diese Regel folgt aus allgemeinen Überlegungen bei n inneren Reflexionen und m solchen in der Wand. Bei ausschließlich einer inneren Reflexion ($m = 0$; $n = 1$) ist die Notation 102201; bei einer inneren und einer in der Wand ($n = 1$, $m = 1$): 1022 00 01; bei nur einer in der Wand schließlich ($n = 0$, $m = 1$) 10 00 01, bei $m = 0$ dann auch trotzdem 10 01 (im Unterschied zu v1001!).

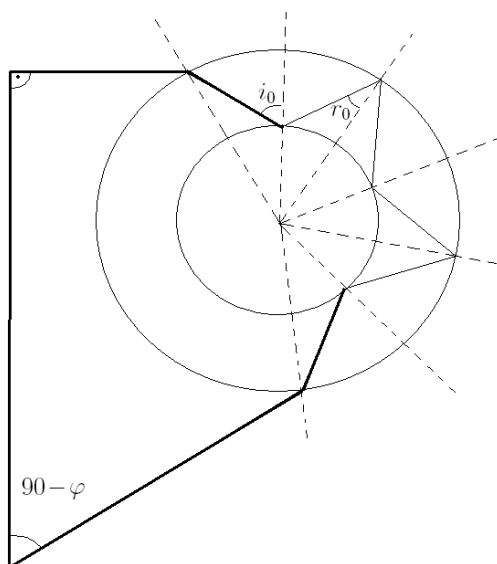


Abbildung 30: Zur Berechnung des Winkels bei Reflexionen ausschließlich in der Wand (die zusätzlichen, ($m = 2$)-entsprechenden Teilstücke des Weges sind weniger fett gezeichnet.)

Die Formel (1) scheint jetzt aber noch nicht einen Strahlengang zu beschreiben,

der ausschließlich in der Wand läuft. Das kleinste n , $n = 0$, würde nämlich bedeuten, dass der Strahl ins Innere taucht. Diese Formel muss zwar getrennt hergeleitet werden, doch bezüglich der äußeren Reflexion bei Vollstäben ist schon eine interessante Eigenschaft aufgefallen, dass dem Nicht-Eintauchen ein $n = -1$ entspricht. Dass dies auch hier gilt, zeigt die Rechnung.

Aus Abb. 30 erkennt man, dass der Lichtweg ein $(5 + 2m)$ -Eck ist, wobei m immer noch für die Anzahl der *Doppeln* in der Kurzschreibweise steht! (In der Zeichnung ist deswegen auch $m = 2$ und nicht 4). Es gibt dann genau m Winkel von $2r_0$ und einen mehr von denen, die $360 - 2i_0$ groß sind. Daraus mit dem bewährten Mittel der Winkelsumme:

$$\begin{aligned}
90 + 90 - \varphi + 2 \cdot (180 - i_1 + r_0) + m \cdot 2r_0 + (m + 1) \cdot (360 - 2i_0) &= 180(2m + 3) \\
90 + 90 - \varphi + 2 \cdot 180 - 2i_1 + 2r_0 + m \cdot 2r_0 + 2 \cdot 180(m + 1) - 2(m + 1)i_0 &= 2m180 + 3 \cdot 180 \\
-2i_1 + 2r_0(1 + m) + 2 \cdot 180 - 2(m + 1)(r_0 + \alpha) &= \varphi \\
-2i_1 + 2r_0(1 + m) + 2 \cdot 180 - 2(m + 1)r_0 + 2(m + 1)\alpha &= \varphi \\
-2i_1 + 2 \cdot 180 + 2(m + 1)\alpha &= \varphi
\end{aligned}$$

$$\varphi = 2 \cdot 180 - 2i_1 - 2\alpha(m + 1)$$

Das ist nun aber genau die schon bekannte Formel, bloß für $n = -1$.

Diese scheinbare Spielerei erleichtert den Umgang mit der Formel: denn nun beschreibt sie tatsächlich alle Mischformen von Strahlengängen, denn sogar vorbeigehende Strahlen sind in dieser Formel enthalten, man braucht nur $m = -1$ einzusetzen. Diese Formel entspricht in ihrer Struktur der eines Strahlengangs in Vollstäben. Alle Möglichkeiten sind sortiert noch einmal in der Tabelle 4 enthalten.

m	n	Kurzschreibweise	Beschreibung
-1	-1	11	Vordere Reflexion
	$a \geq 0$	$\underbrace{v100 \dots 001}_{a \text{ Mal}}$	Vorbeigehende Strahlen mit a Reflexionen in der Wand
$b \geq 0$	-1	$\underbrace{1000 \ 00 \dots 0001}_{b \text{ Mal}}$	b Reflexionen ausschließlich in der Rohrwand
	$a \geq 0$	$\underbrace{1022 \dots 2000 \ 00 \dots 0001}_{a \text{ Mal} \quad b \text{ Mal}}$	a innere Reflexionen und b Reflexionen in der Wand

Tabelle 4: Die Formel enthält, mit einigen Sonderbelegungen von m und n , alle im Rohr möglichen Strahlengänge.

$m = -1$ entspricht also Vollstab-ähnlichen Strahlengängen.

Nur innere Reflexionen: $m = 0$, nur Reflexionen in der Wand: $n = -1$. Diese Asymmetrie in den Zahlenwerten rührt daher, dass es zwar Reflexionen in der Wand geben kann, ohne dass der Strahl jemals durch das Innere gegangen wäre, aber nicht umgekehrt. In der Sprache der Kurzschreibweise gesprochen, kann es einen Weg ohne Zweien mit ausschließlich Nullen geben, aber keinen Weg mit Zweien ganz ohne Nullen.

Wie entstehen nun Spektren? Für diese Frage wird im nächsten Kapitel nun das gebraucht werden, was im ersten Teil der Arbeit bezüglich Intensitäten gesagt worden ist, denn Spektren entstehen an den Intensitätsmaxima. Da es letztlich um eine Beobachtung der Regenbögen im Labor geht, ist die Form der Gesamterscheinung dann irrelevant und auf sie wird nicht weiter eingegangen.

4.3 Entstehung der Regenbögen

Solange R kleiner ist, als beide Brechzahlen, ist die Entstehung der Regenbögen genauso wie bei Vollstäben durch Maxima zu erklären. Zwar konnten die Positionen dieser nicht analytisch berechnet werden, aber numerisch sind sie auffindbar. Die Argumentation bezüglich der Intensitätsmaxima unterscheidet sich nicht von der bei Vollstäben.

Problematisch wird es, wenn durch andere Wahl von R neue Strahlengänge möglich werden. Spektren, die allen ihren Eigenschaften nach durch vorbeigehende Strahlengänge entstanden sein mussten, wurden von mir im Experiment beobachtet, und zwar an genau jenen Stellen, die dem letzten, nicht ins Innere tauchenden Strahl entsprachen. So zeigten diese Spektren auch eine völlige Unabhängigkeit davon, ob das Rohr gerade gefüllt war oder nicht (man kann dann an der Grenze zwischen aufgefüllter Flüssigkeit und der darüber liegenden Luft beobachten). Im Gegensatz zu dem sonst bekannten rechnerischen Maximum sorgt hier das „natürliche“ Maximum offensichtlich für einen Intensitätsanstieg, welches mit Mitteln der Wellenoptik auch an entsprechender Stelle theoretisch bestätigt werden sollte.

Der entsprechende Winkel kann aber mit dieser Annahme dann einfach bestimmt werden. In den Rechnungen wurde die Gleichung $\sin r_0 = \frac{r_2}{r_1} = \frac{1}{R}$ verwendet. Obwohl r_0 auch größer sein kann, ist dies genau derjenige Strahl, der den Regenbogen

als natürliches Maximum bildet.

$$\begin{aligned}\sin r_0 &= \frac{1}{R} \\ i_1 &= \arcsin\left(\sin r_0 \frac{n_0}{n_1}\right) \\ &= \arcsin\left(\frac{1}{R} \frac{n_0}{n_1}\right)\end{aligned}$$

Nun kann man dies wieder zu einer Formel zusammensetzen:

$$\varphi_{\max} = 180(1 - n) + 2(n + 1) \cdot \arcsin \frac{1}{R} - 2 \arcsin \frac{1}{R} \frac{n_0}{n_1}$$

Wie man erkennt, steht hier einem nullten Regenbogen nichts im Wege. Ganz oft kommen aber auch andere „natürliche“ Maxima vor, etwa beim ersten Strahl, der gerade ins Innere taucht. Auch er bildet für all das andere Licht, das ebenfalls diesem Strahlengang folgt, ein Maximum. Solche „Enden“ bzw. „Anfänge“ von Definitionsbereichen von $\varphi(i)$ sollten auch für Intensitätsmaxima sorgen, und wie es scheint, tun sie dies wirklich. Es wurde an einem Rohr beobachtet und dort deutlich mehr Spektren gesehen, als man ohne diese zusätzlichen „Enden“ erwarten würde. Dies ist zwar kein vollständiger Beweis, aber es wäre problematisch, das Beobachtete ohne die „Enden“ zu erklären.

Diese Fragen sind sicherlich für eine komplette Theorie interessant, aber im Experiment benutzt man wohl eher dünnwandige Rohre. Auch Reagenzgläser können gut als solche dienen, und deren R liegt meist unter 1,05. Man sieht dort also nur Regenbögen, die durch rechnerische Maxima entstehen, deren Entstehung analog zu jenen im Vollstab ist. Einen Unterschied gibt es aber doch: Während im Vollstab die Ordnung im Prinzip die Intensität des ausfallenden Lichts festlegte und man somit über die Mindestintensität, die man registrieren kann, die maximale Ordnung abschätzen konnte, sind im Rohr weit mehr Strahlengänge möglich, die eine ähnliche Intensität des ausfallenden Lichts aufweisen. Man sieht also mehr Spektren in Rohren als in Vollstäben, was für eine Vermessung selbiger nicht ungünstig ist.

4.4 Glasrohre im Experiment und in der Simulation

Der Sinn und Zweck der vorangegangenen theoretischen Überlegungen war ja, die Methode der Brechzahlvermessung auch auf Flüssigkeiten auszudehnen. Dazu musste natürlich erst geklärt werden, was und wo man an einem Glasrohr sieht. Es wäre nun angebracht, eine ähnliche Untersuchung zur Genauigkeit dieser Vermessung zu machen, wie sie bei Vollstäben geschehen ist. Allerdings kann hier wieder nur die maximumsbildende Funktion betrachtet werden. Aus Abb. 31 folgt, dass eine Ver-

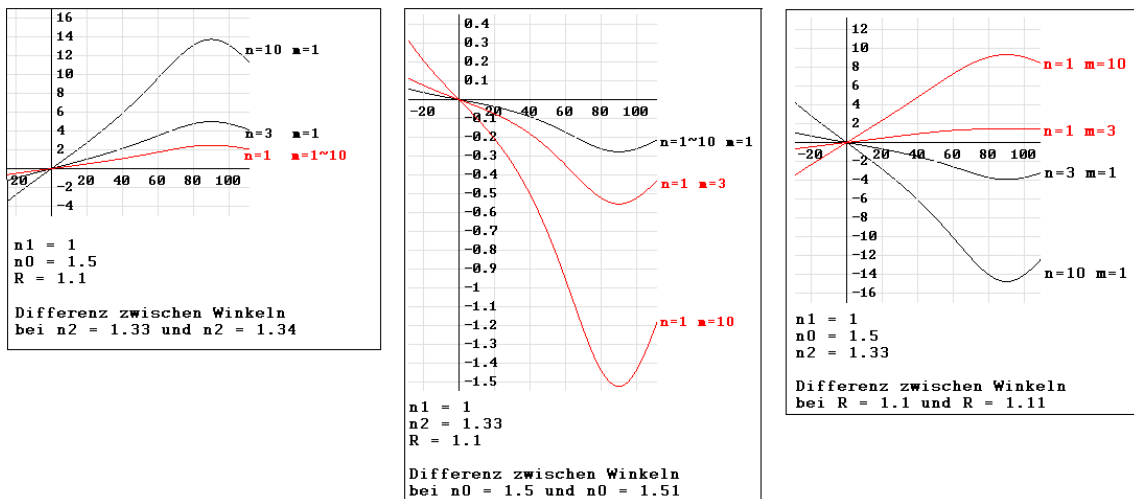


Abbildung 31: Zur Genauigkeit der Vermessung. Bei einem bestimmten i_1 kann die entsprechende Differenz in Grad abgelesen werden. i_1 sollte dem des Maximums entsprechen, man kann aber auch ohne spezielle Kenntnissen desselben zumindest Abschätzungen machen und Tendenzen erkennen.

messung der Winkel genaue Ergebnisse bei der Brechzahl der Flüssigkeit sowie dem Verhältnis R liefert, während die Brechzahl des Glases nur relativ ungenau vermessen werden kann. Dabei steigt die Präzision i. A. mit steigendem n . Man kann speziell bezüglich der Vermessung der Brechzahlen von Flüssigkeiten festhalten, dass man dann sehr genau auf das R achten muss, während die Brechzahl des Glases weniger genau bekannt sein muss. Das kann man mit möglichst großen Rohren erreichen, die dann umso dünnwandiger werden und bei denen die Radien besser vermessen werden können. Da man aber im Prinzip nur ein Gefäß braucht und lediglich immer neue Flüssigkeit einfüllt, lohnt sich auch ein vorangegangenes sorgfältiges Ausschauen der Rohre.

Wahlweise kann man natürlich auch R vermessen, wenn man die Brechzahl der Flüssigkeit genau kennt. Das gibt eine andere Anwendung, denn kleinste Abweichungen von der Kreisform bzw. Änderungen im Radius lassen sich anhand einer Verschiebung der Regenbögen feststellen. Damit kann man dann auch die Qualität der Glasrohre überprüfen.

Die übrige Vermessungsapparatur bleibt so, wie sie schon bei Vollstäben verwendet worden ist. Die Zuordnung beobachteter Spektren gestaltet sich bei Rohren allerdings schwieriger, da die Formeln komplizierter geworden sind und man insgesamt auch mehr Spektren einzuordnen hat. Da ist der Computer ein unverzichtbares Werkzeug. Neben beliebig kompliziert werdenden Rechenprogrammen sind aber auch Computersimulationen für grundsätzliche theoretische Überlegungen wichtig. Hier möchte ich also die Gelegenheit nutzen, um die Funktionsweise einiger von mir

verwendeter Programme vorzustellen.

Von Programmen zum reinen Berechnen von Winkeln und anderen Daten verlangt man relativ viel. Es soll nicht nur der Winkel eines beliebigen Spektrums berechnet werden, sondern vielmehr auch aus Beobachtungen auf andere Daten, vor allem Brechzahlen, zurückgerechnet werden können. Das Kernstück sind also zwei Methoden, die näherungsweise die Nullstellen einer gegebenen Funktion bestimmen bzw. das Extremum einer Funktion suchen. Wäre $\varphi(i_1)$ immer überall definiert, so wäre man auch nur mit einer Methode ausgekommen. Allerdings entstehen z. B. vorbeigehende Regenbögen an Stellen, wo die Ableitung nicht Null ist. Zudem sollte ein Rechenprogramm auch das gleiche aus einer Winkeldifferenz berechnen und eine Korrektur für den Fall, dass man sehr in der Nähe des Rohres beobachtet, ermöglichen. Im Kontext der Vollstäbe wurde davon bereits gesprochen. Es hatte sich herausgestellt, dass es ungünstig ist, das beobachtete Medium zu zentrieren. Da wurde dann eine Lösung gefunden, die mit φ_1 bezeichnet wurde.

Zusätzlich bot mein Programm die Möglichkeit, den Strahlenverlauf außerhalb des Rohres darzustellen, so dass man schnell einen Überblick erhielt. Da oft einem gegebenen Winkel mehrere Brechzahlen entsprachen, hatte man die Möglichkeit eine Schätzung abzugeben, in deren Nähe dann nach einer Nullstelle gesucht wurde.

Während dieses Programm also beim Experimentieren verwendet werden sollte, dienten Simulationen der Darstellung grundsätzlichen Verhaltens der Strahlen. So gab es ein Programm, mit dessen Hilfe man Strahlengänge in Vollstäben beliebiger Querschnitte für beliebig viele Strahlen darstellen konnte. Einzige Voraussetzung war die Eindeutigkeit der Kontur in Polarkoordinaten. Es wurde dann eine beliebige Anzahl Strahlen von einer Seite auf das Objekt gerichtet, jeder davon eine bestimmte Anzahl Male innen reflektiert und anschließend austreten lassen. Dabei wurde die Richtung des Lotes numerisch mithilfe der Konturgleichung berechnet. Gleichzeitig ließ sich das Objekt rotieren. Dieses Programm sollte im Wesentlichen nur zeigen, was passiert, wenn der Querschnitt eines Tropfens verformt wird und z. B. eine Ellipsenform annimmt, sowie die im ersten Teil der Arbeit gezeigten Bilder liefern (etwa Abb. 5(a) bis 5(d)).

Für ein Rohr ein solches Programm zu schreiben ist deutlich aufwendiger, selbst wenn man nur runden Querschnitt erlaubt. Man kann nämlich die Anzahl der Reflexionen nicht mehr so einfach steuern, ebenso ihren Ort. Man brauchte also eine ganz andere Struktur des Programms. Das Hauptkriterium ist jetzt die Intensität geworden, die ein Strahl mindestens noch haben muss, um weiter verfolgt zu werden. Mit definierten Transmissions- und Reflexionskoeffizienten, die als näherungsweise unabhängig vom Winkel angenommen wurden, teilte sich dann die Intensität eines Strahls bis auf Fälle der Totalreflexion auf zwei Strahlen auf. Jeder Strahl produzierte

somit bei jedem Auftreffen auf eine Grenzfläche zwei neue. Die vielen Strahlengänge wurden in gerade Stücke aufgeteilt. Als Datentyp „Strahl“ speicherte ich also den Anfangs- und Endpunkt eines geraden Strecke zwischen zwei Grenzflächen, seine Intensität, das Medium, indem es sich befand (nach bewährter Indexnotation 1, 0, 2) und einige andere Dinge. Das alles wurde in einem Binärbaum gespeichert. Ein Gang von der Wurzel über die Äste entsprach einem möglichen Strahlengang, denn an jedem Knoten „befand“ man sich an einer Grenzfläche und konnte sich, zumindest in den meisten Fällen, entscheiden, ob man eine Reflexion oder eine Refraktion als weiteren Verlauf wählt. Der gesamte Baum enthielt also aus vielen einzelnen geraden Stücken zusammengesetzt alle Möglichkeiten, die ein Lichtstrahl im Rohr an Fortbewegung hatte. Er wurde zuerst rekursiv gefüllt, indem überprüft wurde, ob an den Blättern die Intensität noch hoch genug ist, dass weiter iteriert werden kann. Wenn es nirgendwo mehr etwas zu erledigen gab, war der Baum komplett und konnte gezeichnet werden. Oder es konnten verschiedene Dinge „gemessen“ werden, denn es war eine Art virtuelles Experiment, mit Näherungen der geometrischen Optik. Als eine der interessantesten Untersuchungen konnten Intensitätsdiagramme des ausfallenden Lichts erstellt werden. Dazu wurde um den Querschnitt des Rohrs herum ein (fast) unendlich weit entfernter Kreis gelegt, der in 1° -Segmente unterteilt wurde. Nach dem Erstellen aller möglichen Strahlengänge wurden pro Segment die „registrierten“ Strahlen gezählt und das als Maß für Intensität genommen. Auf dieser Basis sind auch dann analytische Überlegungen zu Intensitäten entstanden. Auch die Indexnotation eines Strahlengangs, wie z. B. 1 0 2 2 0 1, fand hier ihre Anregung.

5 Schlusswort und Ausblick

Diese Arbeit behandelte Regenbögen höherer Ordnungen in Medien mit rundem Querschnitt, nämlich Vollstäben und Rohren.

Regenbögen entstehen durch Aufspaltung des weißen Lichts in seine Spektralkomponenten. Dies kann nur dort geschehen, wo es eine solche Begrenzung des ausfallenden Lichts gibt, dass jede Farbe ihren eigenen Platz hat. Dies wird beim Regenbogen in Vollstäben durch die Kombination aus geometrischem und Intensitätsmaximum gelöst. Das geometrische Maximum sorgt dafür, dass jede Farbe in einem eigenen Lichtkegel reflektiert wird, dessen Größe sich mit der Farbe ändert. Die überstehenden Ränder verwischen nicht, denn durch Intensitätsmaxima an genau diesen Rändern hebt sich die jeweilige Farbe deutlich vor dem Hintergrund anderer ab. Auch ist die Verbindung zwischen diesen beiden Arten Maxima zumindest qualitativ begründet worden: jedes geometrische Maximum hat auch ein Intensitätsmaximum zur Folge. Dagegen gibt es auch Intensitätsmaxima ohne geometrische Maxima. Solche findet man in Regenbögen an Rohren.

Geometrische Maxima in Vollstäben gibt es bei beliebiger Anzahl innerer Reflexionen. Ohne innere Reflexion gibt es dagegen kein geometrisches Maximum. Obwohl es gleichzeitig ein Intensitätsmaximum gibt, liegen alle Farben immer übereinander, so dass keine Aufspaltung des Lichts stattfindet – die Begrenzung des ausfallenden Lichts ist nicht wellenlängenabhängig. Da die Ausfallswinkel nach jeder Reflexion etwas anders liegen, sieht man auch mehrere Regenbögen. Diese werden allerdings immer schwächer, da immer weniger Licht im Tropfen übrig bleibt.

An Vollstäben sorgt der runde Querschnitt dafür, dass alles, was in den Tropfen gelangt, diesen auch wieder verlassen kann, es gibt keine Totalreflexion und alle Strahlen folgen (bis auf die variable Anzahl innerer Reflexionen) demselben Strahlengang. Das ist bei Regenbögen in Rohren anders. Dort sind durch die zusätzliche innere Grenzfläche zwischen der Wand und dem Rohrinernen Möglichkeiten weiterer Reflexionen gegeben. Das vermehrt auch die Anzahl Spektren. Die Möglichkeiten der Variation der Strahlengänge werden vielfältiger, es sind schon zwei Ordnungen, m und n notwendig, um jeden Strahlengang zu beschreiben.

Zwar kann man erreichen, dass die Strahlen von außen parallel auf das Rohr strahlen, aber nach der ersten Refraktion werden sie nicht mehr parallel sein. Wenn diese gebogene Lichtfront auf die innere runde Grenzfläche trifft, kann es passieren, dass die Strahlen dort totalreflektiert werden. Auch ist es bei sehr kleinem inneren Radius möglich, dass etliche Strahlen das Innere gar nicht erreichen, weil nicht genug abgelenkt wurden. Das ist auch der Grund, warum die Bedingung für totalreflektierte Strahlen an der inneren Grenzfläche nicht von der Brechzahl des Glases abhängt, was der Intuition widerspricht. Es ist nicht einfach, sich vorzustellen, wie die Lichtfront

nach der ersten Brechung aussieht und ob und wie sie dann weiter gebrochen wird.

Regenbögenpositionen hängen stark von der Brechzahl des Mediums ab. Anfängliche Unterschiede im refraktierten Winkel verstärken sich durch mehrfache Reflexionen. Die Vermessung der Position von Regenbögen höherer Ordnungen ist also eine Möglichkeit der Vermessung der Brechzahl des jeweiligen Mediums. Die Winkel beziehen sich auf den Lichteinfall; wenn dieser nur ungenau bestimmbar ist, können auch Winkeldifferenzen zwischen verschiedenen Ordnungen vermessen werden, die unabhängig davon sind, wo die Lichtquelle aufgestellt ist. Einige weitere Möglichkeiten der Verbesserung der Genauigkeit des Experiments wurden im ersten Teil dieser Arbeit vorgeschlagen und diskutiert. Bei einer 1° -genauen Apparatur liegt der Messfehler bei Verwendung von noch fast mühelos beobachtbaren Ordnungen bei $\pm 0,001$. Regenbögen in Rohren lassen sich genauso und mit ähnlichen Genauigkeiten vermessen. Dabei muss man allerdings beachten, dass nur die Brechzahl der Flüssigkeit so genau bestimmbar ist, der Messfehler bei einer eventuell gewollten Vermessung der Brechzahl des Glases ist weitaus größer. Gleichzeitig muss R , das Verhältnis aus äußerem zu innerem Radius, sehr genau bekannt sein. Die Anforderungen liegen allerdings im Bereich des Möglichen. Bei größeren Gefäßen wird die Bestimmung zusätzlich einfacher.

Die Zuordnung von Ordnungen zu den beobachteten Spektren ist im Experiment notwendig und gestaltet sich nicht immer einfach, da man zwar die ungefähren Positionen abschätzen kann, sie aber ja eigentlich gerade vermessen will. Wichtige Anzeichen für die Ordnung sind die Richtung der Farben im Spektrum und der Ursprungsort des Spektrums, der sich am einfachsten über „aus der linken Hälfte des Stabes kommend“ oder „aus der rechten Hälfte des Stabes kommend“ beschreiben lässt. Die Voraussage dieser Angaben für die jeweilige Ordnung ist gut geeignet für den Computer. Auch Strahlengänge lassen sich hervorragend vom Computer zeichnen lassen und mit dessen Hilfe untersuchen.

Ungelöste Fragen gibt es aber immer noch. Bei den Rohren fehlt noch die analytische Bestimmung des Maximums. Es mag zwar scheinen, dass man indirekt schon genug darüber weiß und die einzige Motivation für seine exakte Bestimmung nur die bessere Berechenbarkeit sein kann, doch eine exakte Formel ist auch von allgemeinem Interesse. Man könnte sich nämlich vorstellen, dass es Funktionen $\varphi(i_1)$ gibt, die sowohl ein gewöhnliches Maximum als auch eine Definitionslücke aufweisen, die weitere Strahlengänge erlauben würde. Normalerweise hat man aber, sobald diese anderen Strahlengänge möglich werden, keine Maxima mehr. Es wäre sicher interessant zu bestimmen, wann genau dies nicht der Fall ist. Vielleicht würde die explizite Darstellung der Position des Maximums auch neue Regenbogenkonstellationen aufzeigen, die bisher nicht aufgefallen waren. Wenn man aber versucht, die Nullstelle der Ableitung

zu bestimmen, landet man wegen der Ableitungen von \arcsin bei einer Wurzelgleichung, die trotz größter Anstrengungen nicht gelöst werden konnte. Sie kann zwar prinzipiell quadriert werden, läuft dann aber auf eine algebraische Gleichung hinaus, die von sehr hohem Grade ist. Dies liegt u. a. an der Notwendigkeit einer mehrfachen Quadrierung. Man müsste an diese Gleichung also mit ganz anderen Mitteln herantreten.

Eine Untersuchung wert ist auch die Frage nach der Intensität des Regenbogens, die hier ja nur auf Basis einfachster Überlegungen aus der geometrischen Optik beantwortet werden konnte. Vor allem bei Rohren fehlt noch der korrekte theoretische Nachweis der Intensitätsmaxima für Strahlengänge ohne jene Maxima, die sich im Nullwerden der Ableitung äußern. Dabei bietet es sich an, das Programm für Strahlengänge in Rohren entsprechend zu erweitern, um eine der Realität besser angepasste Intensitätsverteilung zu berechnen.

Die Idee, Regenbogenwinkel zu höheren Ordnungen auszurechnen, hatte ich, nachdem ich selbiges für den Hauptregenbogen in einer Vorlesung vorgeführt bekommen habe, im Herbst 2007. Die Arbeit bekam im Februar dann beim Regionalwettbewerb Jugend forscht einen 1. Preis im Fachbereich Physik, beim Landeswettbewerb Anfang April einen 2. Preis und zwei Sonderpreise. Auch meine Facharbeit beschäftigte sich mit einem Teilaspekt von Regenbögen in Glasrohren, nämlich mit der qualitativen Ausarbeitung der Grundstrahlengänge. Das Thema beschäftigte mich also über ein Jahr lang, wenngleich auch mit einigen Unterbrechungen. Dabei habe ich viel gelernt, nicht nur wie man \arcsin ableitet, sondern auch wie vielfältig und herausfordernd ein Thema sein kann, das angesichts anderer optischer Phänomene in der Natur eher abgedroschen scheint. Nicht nur, dass ich Optik insgesamt jetzt mit anderen Augen sehe, ich habe auch Freude daran gefunden, atmosphärische Ereignisse zu beobachten und zu photographieren. Und außerdem fallen mir jetzt überall Regenbögen auf – in Sonnenbrillen, Overhead-Projektoren, Fontänen, Hochhausfenstern, Weingläsern und Wolken.

6 Danksagung

Danken möchte ich vor allem meinem Betreuungslehrer Herrn Korfsmeier, der nicht nur in der Vorbereitung auf die Wettbewerbe mich tatkräftig bei allen Vorhaben unterstützt, sondern es auch kurzfristig und zum Teil in den Ferien möglich gemacht hat, dass ich experimentieren konnte. Meiner Familie möchte ich dafür danken, dass sie mir bei allem Wettbewerbsstress stützend beistand und meinen Experimentaufbau zu Hause ertragen hat. Mein Dank gebührt weiterhin Herrn J. Künnemann dafür, dass er einen genauen Schrittmotor zur Verfügung gestellt hatte und mich bei dessen Installation unterstützt hat sowie Herrn Schriever für den zur Verfügung gestellten Glasstab, der lange Zeit in seiner Qualität unübertroffen war.

7 Anhang I

7.1 Über Polygone und ihre Winkelsummen

In den beiden Kapiteln wurde φ immer über die Winkelsumme in einem Polygon berechnet. Inwieweit das gerechtfertigt ist, soll dieser Abschnitt zeigen. Das Hauptproblem dabei ist, dass sich der Strahlengang schneiden kann, das Polygon also Schleifen ausbildet. Man spricht dann von überschlagenen Polygonen.

Das Polygon habe m Schleifen. Die Bestimmung der Winkelsumme geschieht, indem man sich vorstellen, dass man auf dem Polygon läuft und an jeder Ecke die Bewegungsrichtung um $180 - \alpha$ (s. Abb. 32) ändert. Bei m Schleifen müsste man, wenn man an den Ausgangspunkt zurückkehrt, um $m \cdot 360^\circ$ gedreht haben:

$$\begin{aligned} m \cdot 360 &= \sum_{i=1}^n 180 - \alpha_i = \sum_{i=1}^n 180 - \sum_{i=1}^n \alpha_i \\ \sum_i \alpha_i &= 180n - 360m = 180(n - 2m) \end{aligned}$$

Da man meist nicht im Voraus sagen kann, wie viele Schleifen der Strahlengang

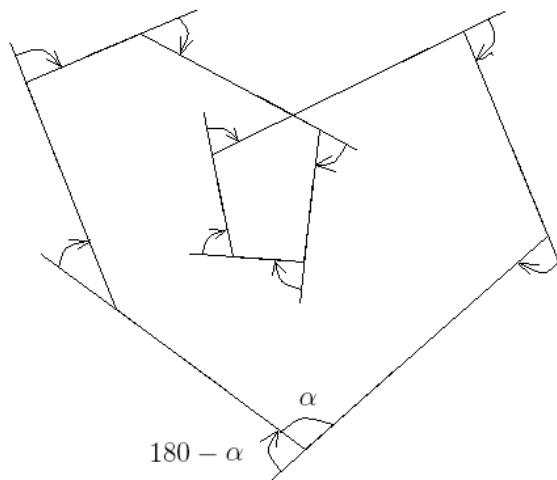


Abbildung 32: Ein Polygon mit einer Schleife

machen wird und man die Formel für $m = 1$ verwendet, macht man einen Fehler von $180(n - 2) - 180(n - 2m) = 180n - 360 - 180n + 360m = 360(m - 1)$, also ein Vielfaches von 360° . Damit sind in der Formel $\varphi(i)$ die Vielfachen von 180 Grad nur bis auf ein Vielfaches von 360° korrekt. Da solche aber in der Anwendung der Formel uninteressant sind (und bei der Ableitung sowieso wegfallen), ist eine Anwendung dieser Rechenmethode erlaubt.

8 Anhang II – Ergänzungen

8.1 Systematische Betrachtung der Maximierung

Mai 2009

Die Formel $\varphi = 180(1 - n) + 2[r_2(1 + n) - \alpha(1 + m) - i_1]$ beschreibt alle in einem Rohr möglichen Strahlengänge. Insbesondere enthält sie auch den Sonderfall eines Vollstabes.

Es gilt:

$$\sin r_0 = \sin i_1 \frac{n_1}{n_0}$$

$$\begin{aligned}\alpha &= \arcsin(R \sin r_0) - r_0 \\ &= \arcsin\left(R \frac{n_1}{n_0} \sin i_1\right) - \arcsin\left(\sin i_1 \frac{n_1}{n_0}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin r_2 &= \sin i_0 \frac{n_0}{n_2} \\ &= \sin(r_0 + \alpha) \frac{n_0}{n_2} \\ &= R \frac{n_1}{n_0} \sin i_1 \frac{n_0}{n_2} \\ &= R \frac{n_1}{n_2} \sin i_1\end{aligned}$$

Weiterhin gilt $\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Zusammensetzen:

$$\begin{aligned}\varphi &= 180(1 - n) - 2i_1 + 2(1 + n) \arcsin\left(R \frac{n_1}{n_2} \sin i_1\right) \\ &\quad - 2(1 + m) \arcsin\left(R \frac{n_1}{n_0} \sin i_1\right) + 2(1 + m) \arcsin\left(\frac{n_1}{n_0} \sin i_1\right) \\ \frac{d\varphi}{di_1} &= -2 + 2(1 + n) \frac{R \frac{n_1}{n_2} \cos i_1}{\sqrt{1 - \left(R \frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2 i_1}} \\ &\quad - 2(1 + m) \frac{R \frac{n_1}{n_0} \cos i_1}{\sqrt{1 - \left(R \frac{n_1}{n_0}\right)^2 \sin^2 i_1}} + 2(1 + m) \frac{\frac{n_1}{n_0} \cos i_1}{\sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_0}\right)^2 \sin^2 i_1}}\end{aligned}$$

$$1 = (1 + n) \frac{\cos i_1}{\sqrt{\left(\frac{n_2}{Rn_1}\right)^2 - \sin^2 i_1}} - (1 + m) \frac{\cos i_1}{\sqrt{\left(\frac{n_0}{Rn_1}\right)^2 - \sin^2 i_1}} + (1 + m) \frac{\cos i_1}{\sqrt{\left(\frac{n_0}{n_1}\right)^2 - \sin^2 i_1}} \quad (2)$$

Diese Gleichung ist zu lösen, damit man an das dem Maximum entsprechende i_1 herankommt.

Man erkennt, dass es drei „Brechzahlen“ gibt, die analog zum ν bei Vollstäben mit ν_k , $k = 1, 2, 3$ bezeichnet werden:

$$\begin{aligned} \nu_1 &= \frac{n_0}{n_1} \\ \nu_2 &= \frac{1}{R} \frac{n_0}{n_1} \\ \nu_3 &= \frac{1}{R} \frac{n_2}{n_1} \end{aligned}$$

Die Bedingungen für das Auftreten von totalreflektierten bzw. vorbeigehenden Strahlen lassen sich als (abstrakte?) Totalreflexionen deuten, die in einem Fall physikalisch allerdings keine Reflexion darstellen.

Die Formel lässt sich abkürzen mit

$$\sum_{k=1}^3 C_k \frac{\cos i_1}{\sqrt{\nu_k^2 - \sin^2 i_1}} \quad (3)$$

Dabei sind:

$$\begin{aligned} C_1 &= +(1 + m) \\ C_2 &= -(1 + m) \\ C_3 &= +(1 + n) \end{aligned}$$

Man erkennt auch deutlich, wie sehr sich das Problem des Lösens dieser Gleichung vereinfacht, wenn $R = 1$. Tatsächlich: dann ist $\nu_1 = \nu_2$, und durch die verschiedenen Vorzeichen fallen die ansonsten nun gleichen Terme heraus. Übrig bleibt

mit $\nu_3 = \frac{n_2}{n_1} \equiv \nu$

$$\begin{aligned}
 1 &= C_3 \frac{\cos i_1}{\sqrt{\nu^2 - \sin^2 i_1}} \\
 1 &= (1+n) \sqrt{\frac{1 - \sin^2 i_1}{\nu^2 - \sin^2 i_1}} \\
 \frac{1}{(1+n)^2} &= \frac{1 - \sin^2 i_1}{\nu^2 - \sin^2 i_1} \\
 \nu^2 - \sin^2 i_1 &= (1+n)^2 - (1+n)^2 \sin^2 i_1 \\
 \sin^2 i_1 &= \frac{(1+n)^2 - \nu^2}{(1+n)^2 - 1}
 \end{aligned}$$

Bewundernswert ist auch hier die Symmetrie zwischen dem Auftreten der Terme $(n+1)^2$ und ν^2 in der Lösung und in der Ausgangsgleichung. Leicht erhält man dann das schon erreichte Ergebnis

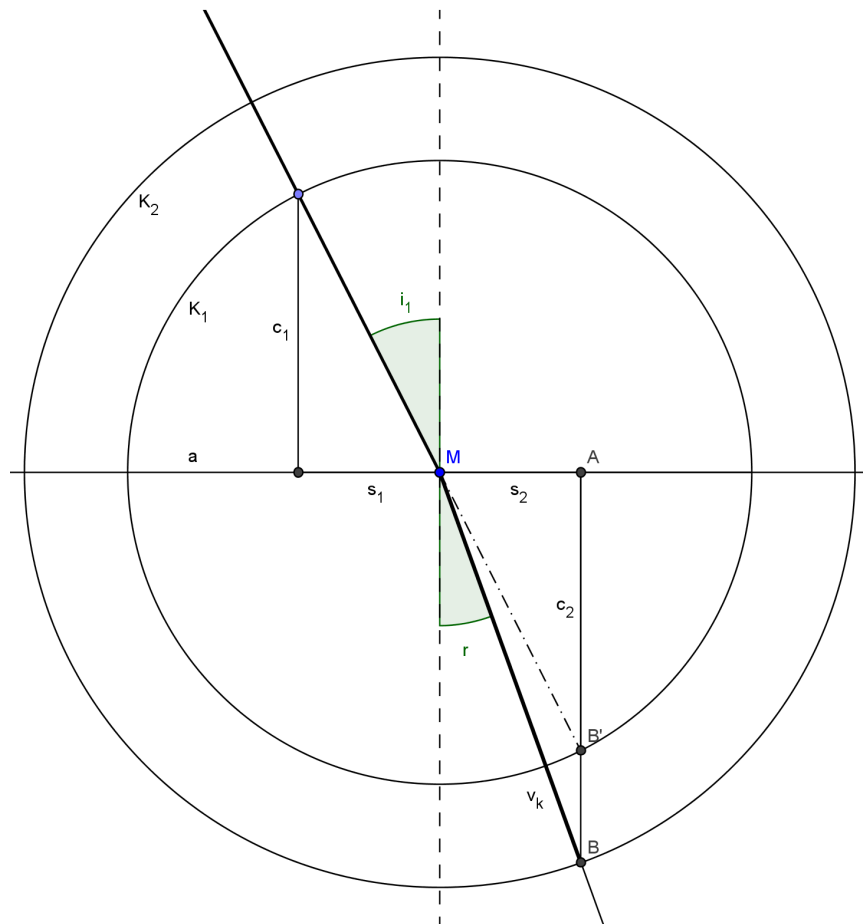
$$\cos^2 i_1 = 1 - \sin^2 i_1 = \frac{(1+n)^2 - 1 - (1+n)^2 + \nu^2}{(1+n)^2 - 1} = \frac{\nu^2 - 1}{(1+n)^2 - 1}$$

Gleiches Ergebnis erhält man auch für $m = -1$.

Das Lösen der eigentlichen Gleichung (2) ist weitaus schwieriger, und bleibt nach wie vor als Aufgabe. Durch Bilden eines Hauptnenners (Wurzel) erhält man drei Wurzeln als Summe im Zähler, insgesamt durch Auflösen des Bruchs also vier Wurzeln, die eine mehrfache Quadrierung notwendig machen. Mit der Substitution $z \equiv \sin^2 i_1$ erhält man so trotzdem Gleichungen höherer, als vierter Ordnung in z .

Die Terme der Gleichung (3) lassen sich geometrisch deuten. Das ist in Abb. 8.1 für den Fall $R = 1$, also nur für einen Term der Form $\frac{\cos i_1}{\sqrt{\nu_k^2 - \sin^2 i_1}}$, dargestellt. Dabei stellt der die waagerechte Gerade a die Grenze zwischen zwei Medien dar (bzw. um ganz präzise zu sein, die Tangente zu dieser Grenze am Punkt M). Im Punkt M fällt ein Strahl unter einem Winkel i_1 ein. Dieser ist in das andere Medium hinein verlängert. Unter der Annahme, dass der Kreis K_1 den Radius Eins hat, finden wir den Term $\cos i_1$ zwei Mal, nämlich als die beiden Strecken c_1 und c_2 . Entsprechend ist $\sin i_1$ als s_1 und s_2 .

Als nächstes Konstruieren wir einen Kreis K_2 mit Radius ν_k . Dann finden wir offensichtlich $\sqrt{\nu_k^2 - \sin^2 i_1}$ als die Kathete AB des rechtwinkligen Dreiecks MAB . Die Aussage der Maximumsbedingung lautet also, dass der Winkel φ maximal ist, wenn AB' sich zu AB wie 1 zu $(1+n)$ verhält. Gleiches findet man auch auf der anderen Seite des Kreises (oben links im Bild). Gleichzeitig bietet dies eine Konstruktionsmöglichkeit für das Brechungsgesetz, denn man kann sich leicht überzeugen, dass



es sich bei dem Winkel r tatsächlich um den Winkel zum refraktierten Strahl handelt.

Diese geometrische Deutung lässt sich auch auf die allgemeine Gleichung (3) ausdehnen, sie verliert allerdings dann etwas ihre Anschaulichkeit. Zudem hat man dann insgesamt 4 Kreise zu zeichnen.

8.2 zu 3.4

Die Berechnung der besonderen Konstellation bei $\nu = \sqrt{2}$ ist nicht ganz korrekt.

Vielmehr sollte die Rechnung anders angesetzt und so anschaulicher werden.

Wir betrachten die Richtungen, in die Regenbögen zu sehen sind. Dabei tun wir ausschließlich so, als sei die $\varphi(i)$ -Abhängigkeit linear: wir nutzen also die Asymptote. Dabei fordern wir die Besonderheit, dass der Winkel zwischen zwei benachbarten Regenbögen $\Delta\varphi$ nicht nur kommensurabel mit dem rechten Winkel ist, sondern wir fordern sogar, dass es ein Teil von 360° ist: $|\Delta\varphi| = \frac{360}{\Delta n}$. Damit wären der k -te und der $(k + \Delta n)$ -te Regenbogen auf dem gleichen Platz, wir suchen natürlich das kleinste Δn . Mit $\varphi = n \cdot (2r_{total} - 180) + 2r_{total}$ ergibt sich $|\Delta\varphi| = |2r_{total} - 180| = \frac{360}{\Delta n}$. Mit $\sin r_{total} = \frac{1}{\nu}$ gibt das $\frac{1}{\nu} = \sin(90 \pm \frac{180}{\Delta n}) = \pm \cos(\frac{180}{\Delta n})$. Für $\Delta n = 1$ und $\Delta n = 2$ ergeben sich keine sinnvollen Werte für ν , für $\Delta n = 3$ und $\Delta n = 4$ aber liefert die Formel $\nu = 2$

und $\nu = \sqrt{2}$. Die weiteren Brechzahlen entnehme man der nachfolgenden Tabelle:

Δn	ν
1	-1
2	$\pm\infty$
3	2
4	$\sqrt{2}$
5	$\sqrt{5} - 1$
6	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$
7	$\frac{1}{\cos \pi/7}$
8	$\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$
9	$\frac{1}{\cos \pi/9}$
10	$\sqrt{2 - \frac{2\sqrt{5}}{5}}$

Die kleinste Brechzahl mit dieser Besonderheit ist also 2, nicht $\sqrt{2}$. Der Fehler liegt darin, dass 180 Grad Differenz angenommen wurde, und nicht 360!

9 Literaturverzeichnis

- [1] Airy, Sir G.B.: *On the Intensity of Light in the Neighbourhood of a Caustic*, Transactions of the Cambridge Philosophical Society, VI (1838), pp. 379-403, VIII (1849), pp. 595-600
- [2] Babinet J.: *Über die optischen Kennzeichen der Minerale*, Annalen der Physik und der Chemie, Veröffentlicht von J.A. Barth, Elfter Band, Leipzig 1837, Seiten 139-143
- [3] Billet, F.: *Mémoire sur les dix-neuf premiers arcs-en-ciels de l'eau*, Annales scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure, 1re série, tome 5, 1868, p. 67-109
- [4] Boyer C. B.: *The Rainbow: From Myth to Mathematics*, Th. Yoseloff, New York [u.a.], 1959
- [5] Hammer, Rev. D.: *Airy's Theory Of The Rainbow*, American Meteorological Society, Vol. 32, No. 11, Nov. 1904, pp. 503-508
- [6] Laven, P.: *The optics of a water drop - Mie scattering and the Debye series*, <http://www.philiplaven.com/index1.html>, eingesehen am 05.02.2009
- [7] Lee, Raymond L. Jr.: *Mie theory, Airy theory, and the natural rainbow*, Applied Optics Vol. 37, No. 9, 20 March 1998, pp. 1506-1519
- [8] Minnaert, M.: *Licht und Farbe in der Natur*, Birkhäuser, Berlin [u.a.], 1992
- [9] Newton, I.: *Optika*, Verlag der Akademie der Wissenschaften der UdSSR, 1946, Seiten 248-253
- [10] Nussenzweig, M.: *The Theory of the Rainbow*, Scientific American, April 1977, Vol. 236, No. 4, pp. 116-127
- [11] Vollmer, M.: *Lichtspiele in der Luft – atmosphärische Optik für Einsteiger*, Elsevier, Spektrum, Akad. Verl., Heidelberg [u.a.], 2006
- [12] Walker, J. D.: *Multiple rainbows from single drops of water and other liquids*, American Journal of Physics, Vol. 44, No. 5, May 1976, pp. 421-433

Abbildungsnachweis: Alle verwendeten Skizzen, Abbildungen und Photos sind selbst erstellt bzw. aufgenommen.