Magische Sechsecke

Wasilj Barsukow, Dezember 2009
w.barsukow@wwu.de

Bisherige Ergebnisse :

1 Existenz und Wert von Reihensummen

Ein magisches Sechseck der Ordnung n hat $\frac{R(n)}{3} = 2n-1$ Reihen in jeder der 3 Richtungen. Es hat $N(n) = 3n^2 - 3n + 1$ Zellen. Angenommen, man wolle auf diese die ganzen Zahlen von a bis b einschließlich verteilen. Dann muss für die Gesamtsumme der Zahlen gelten

$$\begin{aligned} S &= a + a + 1 + a + 2 + a + 3 + a + 4 + \cdots + \underbrace{a + (b-a)}_{b} \\ &= a \cdot (b - a + 1) + \sum_{i=1}^{b-a} i = a \cdot (b - a + 1) + \frac{(b-a)(b-a+1)}{2} \\ &= \frac{(b-a+1)(a+b)}{2} \end{aligned}$$

Falls wir N Zahlen haben, so gehen diese von a bis $b = a + N - 1$. Dann gilt

$$S = \frac{(a + N - 1 - a + 1)(a + a + N - 1)}{2} = \frac{N(2a + N - 1)}{2}$$

Nun hat man in einem Sechseck $N(n) = 3n^2 - 3n + 1$ Zahlen zu verteilen:

$$S(n) = \frac{(3n^2 - 3n + 1)(2a + 3n^2 - 3n)}{2} = \frac{9n^4 - 18n^3 + n^2(6a + 12) - 3n(2a + 1) + 2a}{2}$$

Offensichtlich gilt dann für die Reihensumme s (auch Zeilensumme genannt):

$$s(n) = \frac{S(n)}{2n - 1} = \frac{9n^4 - 18n^3 + n^2(6a + 12) - 3n(2a + 1) + 2a}{2(2n - 1)}$$

Um Bruchzahlen zu vermeiden, verwende man $32 \cdot s(n)$

$$32 \cdot s(n) = 72n^3 - 108n^2 + 6n(8a + 7) - 3(8a + 1) + \frac{8a - 3}{2n - 1}$$

Nun muss der Restbruch ganzzahlig sein und dann auch noch der gesamte Term durch 32 teilbar.

Jedenfalls gilt wegen $\frac{8a-3}{2n-1} \geq 1$ die Schranke $n \leq 4a - 1$, das heißt $n_{\max} = 4a - 1$. Dieses $n_{\max}$ hat eine bemerkenswerte Eigenschaft: $\frac{8a-3}{2n_{\max}-1}$ ist immer ganzzahlig! Mehr noch: es gilt:

$$\frac{8a-3}{2n_{\mathrm{max}}-1} = \frac{8a-3}{8a-3} = 1$$

$$32s(n_{\mathrm{max}}) = 72n_{\mathrm{max}}^3 - 108n_{\mathrm{max}}^2 + 6n_{\mathrm{max}}(8a+7) - 3(8a+1) + \frac{8a-3}{2n-1}$$

$$= 4608a^3 - 4992a^2 + 1824a - 224$$

$$s(n) = 144a^3 - 156a^2 + 57a - 7 \in \mathbb{N}$$

Es sei angemerkt, dass dies nicht unbedingt das kleinste zu einem a gehörige n ist. Ganz im Gegenteil, es ist sogar das maximale. Z. B. findet man, dass für $a = 3$ zwar nach Tabelle 1 ein Sechseck der Ordnung 11 mit der Reihensumme 2648 gehört (wenn denn ein solches existiert), aber schon für die Ordnung 2 findet man eine ganzzahlige Reihensumme von 14. Dies wäre ein ebenso guter Kandidat für ein Sechseck. Es heißt in beiden Fällen noch nicht, dass es ein solches Sechseck (also eine diese Forderung erfüllende Zahlenbelegung) tatsächlich gibt.
Wichtig ist, dass zu jedem Anfang einer Folge natürlicher Zahlen in jedem Fall stets eine vernünftige Reihensumme $s(n)$ existiert, und damit (mindestens) ein Sechseck-Kandidat.

a	n_{max}	$s(n_{\mathrm{max}})$
1	3	38
2	7	635
3	11	2648
4	15	6941
5	19	14378
6	23	25823
7	27	42140

Tabelle 1: Die Reihensummen für verschiedene a und die zugehörigen Ordnungen der Sechsecke.

(26.12.2009)

2 Vektorraum der Hexagone

Die Hexagone gleicher Ordnung n (mit beliebigen, nicht notwendigerweise überall gleichen Zeilensummen) bilden einen Vektorraum, der fortan mit Hex_n bezeichnet werden soll. Der zugehörige Körper ist der der reellen Zahlen. Die Addition wird analog zu der von Matrizen zellenweise erklärt. Sie ist kommutativ und besitzt ein neutrales Element in Form des allein mit Nullen gefüllten Hexagons 0_n. Zu jedem Hexagon existiert auch das inverse Hexagon. Die skalare Multiplikation wird ebenfalls zellenweise erklärt; es gelten die Distributivgesetze und die Multiplikation mit 1 überführt das Hexagon in sich selbst.
$\mathsf{MHex}_n \subset \mathsf{Hex}_n$ ist der Vektorraum der Hexagone mit stets der gleichen Summe in allen Zeilen. Dabei darf die Summe von Hexagon zu Hexagon verschieden sein. MHex_n ist ein Untervektorraum von Hex_n, denn es ist abgeschlossen bezüglich sowohl der Addition als auch der Multiplikation. Denn seien $h_1, h_2 \in \mathsf{MHex}_n, \lambda \in \mathbb{R}$ mit jeweils den Zeilensummen z_1 und z_2. Offensichtlich hat dann h_1+h_2 die Zeilensumme z_1+z_2 und λh_1 die Zeilensumme λz_1. Zudem gilt: $0_n \in \mathsf{MHex}_n$.
MHex_n selbst hat einen weiteren Untervektorraum, nämlich den von magischen Hexagonen mit Zeilensumme Null. Die Mengen magischer Hexagonen mit von Null verschiedenen Zeilensummen sind affine Unterräume. Wir wählen die Bezeichnung $\mathsf{MHex}_n(\zeta)$ für Räume magischer Hexagone mit Zeilensumme ζ.
Es sei $\zeta_n : \mathsf{Hex}_n \to \mathbb{R}^{R(n)}$ die Abbildung, die für ein Hexagon den Vektor der Zeilensummen ausgibt. Das Bild von $\zeta_n(\mathsf{MHex}_n)$ ist eindimensional. ζ_n ist ein Homomorphismus, denn $\zeta_n(\alpha h_1 + \beta h_2) = \alpha\zeta_n(h_1) + \beta\zeta_n(h_2)$.

(24.06.2010)

3 Gleichungssysteme und Dimension

Die Informationen über die Reihensummen können als Gleichungssystem über den Zellen als Variablen formuliert werden. Man hat allerdings $R(n) = 3(2n-1)$ Gleichungen für $N(n) = 3n^2 - 3n + 1$ Variablen. Für alle $n \geq 3$ ist das Gleichungssystem von vornherein unterbestimmt[1]. Doch stellt man beim Lösen dieser Systeme fest, dass sogar immer eine größere Zahl von freien Variablen auftaucht, als man zunächst vermutet hätte. Durch (computergestütztes) Lösen der Gleichungssysteme für verschiedene n lässt sich Tabelle 2 aufstellen. Es fällt auf, dass die Anzahl der freien Variablen des Sechsecks n-ter Ordnung

n	#Variablen	#freie Variablen
3	19	7
4	37	19
5	61	37
6	91	61
7	127	91
8	169	?
9	217	?
10	271	?

Tabelle 2: Die Anzahl der (freien) Variablen in Sechsecken verschiedener Ordnungen. Die nicht ausgefüllten Felder wurden nicht überprüft.

mit der Gesamtanzahl aller Variablen des Sechsecks $(n-1)$-ter Ordnung übereinzustimmen scheint.

FRAGE: Warum ist dies so?

Hier ist zu betonen, dass diese Anzahl sich auf Elemente von $\mathsf{MHex}(\zeta)$ für *festes* ζ bezieht. Die unterschiedlichen Summen würden noch eine weitere freie Variable bieten. (27.12.2009)

BEWEIS: Es gilt offensichtlich: $\dim \mathsf{Hex}_n = N(n)$. Desweiteren liefere $\zeta_n : \mathsf{Hex}_n \to \mathbb{R}^{R(n)}$ wie oben die Zeilensummen. Da es ein Homomorphismus ist, gilt der Dimensionssatz

$$\dim \mathsf{Hex}_n = \dim \ker \zeta_n + \operatorname{rg} \zeta_n$$

Die Anzahl freier Variablen eines magischen Hexagons mit fester Zeilensumme ζ ist $\dim \ker \zeta_n$, denn $\ker \zeta_n$ ist der Raum aller Hexagone, deren Zeilensummen alle Null sind, das heißt es ist $\mathsf{MHex}_n(0)$. Damit ergibt sich:

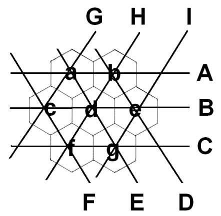
$$\dim \mathsf{MHex}_n(0) = N(n) - \operatorname{rg} \zeta_n \tag{1}$$

Der Homomorphismus ζ_n kann als Matrix dargestellt werden, wenn für jeden Hexagon eine Repräsentation als $\in \mathbb{R}^{N(n)}$ gefunden wird. Dabei soll den Zellen die angegebene Reihenfolge zugeordnet werden. Die Repräsentation der Reihensummen als $\in \mathbb{R}^{R(n)}$ ist: zuerst waagerecht, dann links oben–rechts unten, dann rechts oben–links unten. Diese Codierung wird fortan stets stillschweigend verwendet. Für $n = 2$:

[1] Die Fälle $n = 1$ und $n = 2$ sind trivial lösbar bzw. nicht lösbar.

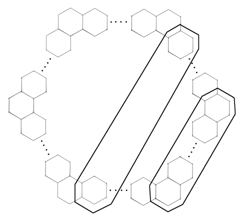
	a	b	c	d	e	f	g
A	1	1					
B			1	1	1		
C						1	1
D		1			1		
E	1			1			1
F			1			1	
G	1		1				
H		1		1		1	
I					1		1

(2)



Mit Großbuchstaben werden dabei die Zeilen (Gleichungen) bezeichnet. Der Rang dieser Matrix ist der Rang von ζ_n. Der Rang ist die Anzahl linear unabhängiger Zeilen. Im folgenden soll auch von linear unabhängigen Gleichungen gesprochen werden, wenn eigentlich die Zeilen A, B, C, ... dieser Matrix gemeint sind.

Nun soll untersucht werden, wie sich die linearen Abhängigkeiten verändern, wenn wir den Schritt von einem n-Hexagon zu einem $(n+1)$-Hexagon machen. Dabei gibt es zwei Änderungen:

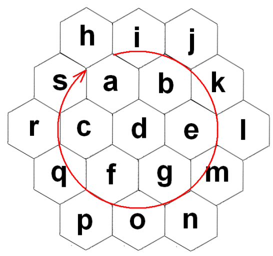


1. All die alten Gleichungen bekommen genau zwei Summanden mehr, jeweils einen von beiden Enden der nun länger gewordenen Reihe. Das bezeichnen wir asl Erweiterung.

2. Es kommen sechs Gleichungen dazu (zwei Gleichungen pro Diagonalrichtung). Man bezeichne sie als Randgleichungen.

Für $n = 2$ gibt die nachfolgende Matrix eine Übersicht über die Änderungen.

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s
A	1	1									1								1
B			1	1	1							1						1	
C						1	1						1				1		
D		1			1				1				1						
E	1			1			1	1						1					
F			1			1									1				1
G	1		1						1								1		
H		1		1		1				1						1			
I					1		1				1				1				
J								1	1	1									
K										1	1	1							
L												1	1	1					
M														1	1	1			
N																1	1	1	
O								1										1	1



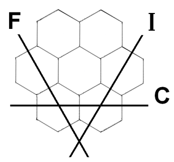
Man beachte, dass die Variablen des Randes stets im Uhrzeigersinn durchlaufen werden.

Nun versuchen wir, linear unabhängige Zeilen zu sammeln. Als erstes nehmen wir die sechs neu hinzugekommenen. Ihre Menge soll $\mathcal{N}$ heißen.
Betrachten wir jetzt die alten, erweiterten Gleichungen. Keine von ihnen kann man durch irgendeine Linearkombination der sechs neuen erzeugen, denn diese haben gar nichts mit den alten Variablen zu tun. Wir können zunächst eine von ihnen ebenfalls unserer Sammlung hinzufügen.
Nun müssen wir bei den alten erweiterten Gleichungen die schon vorher linear unabhängigen besonders herausstellen. Soll ihre Menge $\mathcal{L}$ heißen. Denn wenn wir vorhin nur eine von ihnen dazugenommen haben, so können wir ruhig eine weitere nehmen, und somit alle.

Einzige Frage ist also, ob diejenigen der alten Gleichungen, die vorher linear abhängig von den alten Gleichungen waren, durch die Erweiterung nun linear unabhängig von den neuen geworden sein können. Im Folgenden wird gezeigt, dass dies nicht der Fall ist, das heißt dass man stets jede der ursprünglich linear ahängigen Gleichungen als Linearkombination der neuen Gleichungen $\mathcal{L} \cup \mathcal{N}$ schreiben kann.

Man kann durch Lösen des durch Matrix (2) induzierten Gleichungssystems zeigen, dass drei der Gleichungen linear abhängig von den übrigen sind. Zum Beispiel kann man die folgenden Gleichungen finden:

$$C = -3A - 2B + 2D + E + 2G + H \quad (3)$$
$$I = -2A - B + 2D + E + G \quad (4)$$
$$F = -2A - B + D + 2G + H \quad (5)$$



Im Allgemeinen können nicht beliebige Tripel von Gleichungen als die linear abhängigen gewählt werden. Diese Wahl ist allerdings eine der symmetrischen. Betrachten wir nun die letzte der Gleichungen (5). Die Großbuchstaben sollen noch immer die alten Gleichungen bezeichnen, ihre erweiterten Versionen sollen statt A $\hat{A}$, statt B $\hat{B}$, usw heißen. Jetzt gilt nicht mehr $\hat{F} = -2\hat{A} - \hat{B} + \hat{D} + 2\hat{G} + \hat{H}$. Nach Konstruktion taucht keine der alten Variablen hier mehr auf, nur mit den alten Variablen würde also tatsächlich Null herauskommen. Die Erweiterungen ergeben erst Null, wenn auch eine geeignete Linearkombination der sechs neuen Gleichungen gefunden wird.

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s
$-2A - B + D$ $-F + 2G + H$									3	1	−2	−1	1		−1	1	2	−1	−3
J								1	1	1									
K										1	1	1							
L												1	1	1					
M														1	1	1			
N																1	1	1	
O								1										1	1
$3J - 2K + L$ $-M + 2N - 3O$									3	1	−2	−1	1		−1	1	2	−1	−3

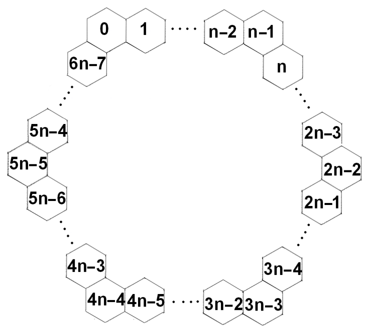
In unserem Fall $2 \to 3$ findet man zum Beispiel: $\hat{F} = -2\hat{A}-\hat{B}+\hat{D}+2\hat{G}+\hat{H}-J+K-M+N$. Für diesen Fall ist das genau die Aussage, dass die vorher von den alten Gleichungen linear abhängig gewesene Gleichung F auch in der erweiterten Version $\hat{F}$ von den neuen Gleichungen linear abhängig ist.

Man erkennt leicht wann es eine solche Linearkombination von Gleichungen aus $\mathcal{N}$ gibt. Durch die Wahl der Variablen haben die sechs neuen Gleichungen stets die Struktur von zwei Variablen, die beide in zwei Gleichungen auftauchen und einer, die ausschließlich in einer Gleichung auftaucht. So gibt es in Gleichung K die Variablen j und l, die jeweils auch in J und L auftauchen. Die Variable k aber gibt sonst nirgends. Will man also eine gegebene Erweiterung als Kombination dieser Gleichungen konstruieren, fängt man mit diesen Variablen an, denn offensichtlich hat man in diesem Beispiel keine andere Möglichkeit, als -2 Mal die Gleichung K zu nehmen, um $-2k$ zu haben. Das macht man auch mit dem Nachbarn J, welcher 3 Mal addiert werden muss. Dort wo sie sich aber überschneiden, haben wir keine Wahl mehr, denn dort muss eine 1 stehen, und in diesem Fall tut sie es auch. Damit ist das Kriterium, mit dem nur anhand der Koeffizienten der Erweiterung entscheiden kann, ob die Gleichung als Linearkombination von $\mathcal{N}$ geschrieben werden kann, klar:
Betrachte die Variablen h, j, l, n, p, r, bei denen es eine Überschneidung gibt. Diese Variablen stehen genau an den Ecken des Hexagons. Der Koeffizient vor dieser Variablen muss gleich der Summe der Koeffizienten links und rechts davon sein (z. B. für j: $3+(-2)$). Für unser Beispiel gilt dies ausnahmslos.

Jetzt soll es allgemein gezeigt werden. Dabei nehmen wir (Induktion!) an, dass für alle Ordnungen kleiner als n die erweiterten Gleichungen (3) bis (5) stets linear abhängig von den anderen Gleichungen sind – von den erweiterten alten und den vielzähligen Randgleichungen und wiederum deren Erweiterungen, die inzwischen dazugekommen sind. Wir betrachten den Schritt $(n-1) \to n$ und überprüfen die Erweiterungen aller bisher aufgenommener Gleichungen auf ihre lineare Abhängigkeit von den jetzt hinzukommenden sechs Gleichungen $\mathcal{N}$ nach dem oben gefundenen Kriterium.

Dafür müssen zunächst die Variablen umbenannt werden. Der Rand soll von links oben einmal herum mit 0 beginnend indiziert werden.

Jede der Variablentripel an den Ecken gehört zu genau einer der neun Gleichungen A bis I; diese sind in der Tabelle unten in der zweiten Zeilen angegeben. In den nächsten drei Zeilen stehen die Erweiterungen der Gleichungen (3) bis (5) auf den Rand. Darunter stehen blockweise die Erweiterungen $\mathcal{E}$ der nacheinander dazukommenden neuen Gleichungen (sei waren alle irgendwann Randgleichungen). Die Gleichungen sind in dieser Reihenfolge aufgeführt: Erweiterungen der waagerechten, (oben links–unten rehcts)-, (oben rechts–unten links)-Randgleichungen. Ganz zuletzt sind die sechs neuen Randgleichungen $\mathcal{N}$ aufgeführt, die in diesem Schritt dazukommen.



Jetzt muss überprüft werden, ob die erste Gleichung eine Linearkombination von $\mathcal{E} \cup \mathcal{N}$ ist. Dazu ist es notwendig und hinreichend, dass es eine Linearkombination der ersten

Gleichung und der Erweiterungen $\mathcal{E}$ gibt, die eine dem Kriterium von oben entsprechende Struktur hat. Dazu müssen zwischen den Spalten 0, $n-1$, $2n-2$, $3n-3$ usw. stets die gleichen Zahlen stehen. Die Summe einer dieser Zahlen von links und von rechts muss dann die Zahl in diesen Spalten ergeben.

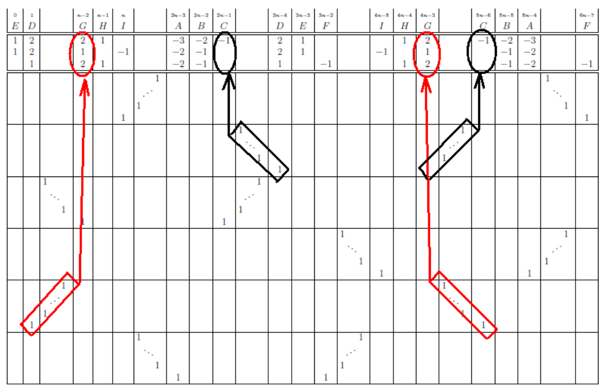
Im Prinzip ist jetzt eine Linearkombination von sehr vielen Gleichungen gesucht. Es wird sich zeigen, dass es reicht, die Summen der Gleichungen in den sechs Blöcken zu betrachten. Das reduziert die Anzahl der gesuchten Koeffizienten auf 6. Seien sie mit α_1 bis α_6 bezeichnet. Betrachten wir nun den Bereich zwischen zwei der erwähnten Spalten 0, $n-1$, $2n-2$ usw. Links steht also eine dieser Eckpalten – sie entspricht den Variablen, die sich an den Ecken des Hexagons befinden –, dann folgt eine weitere Spalte, in der noch Koeffizienten aus der ursprünglichen Gleichung stehen können, dann folgt eine gewisse Anzahl von Spalten, wo absteigend immer nur Einsen stehen, dann folgen wieder zwei Spalten mit den Koeffizienten aus der ursprünglichen Gleichung. Die letztere davon ist wieder eine Eckspalte. Da wir uns auf *einen* solchen Bereich beschränkt haben, sollen der Einfachheit halber die Spalten die gleiche Nummerierung bekommen, wie der Anfang der Tabelle: von 0 bis $n-1$. Man beachte bezüglich der absteigenden Folge der Einsen, dass sie stets in Spalte 2 anfängt, aber in n endet, bzw. in $n-2$ anfängt und in 1 endet. Sollen die Koeffizienten einer der ursprünglichen Gleichungen, jener die wir gerade ins Auge gefasst haben, z_i heißen. Speziell interessieren uns die beiden Koeffizienten in Spalte 1 und in Spalte n. Sie sollen aus offensichtlichen Gründen z_ℓ und z_r heißen.
In jedem Bereich kommen die Einsen immer nur in zwei der sechs Blöcke vor.

Sei mit $\alpha_{\ell r}$ derjenige Koeffizient α der beiden Blöcke gemeint, der zu der von links oben nach rechts unten gehenden Einser-Reihe gehört; und entsprechend $\alpha_{r\ell}$ das andere:

$$\begin{aligned} \alpha_{\ell r} + \alpha_{r\ell} &= \alpha_{\ell r} + z_r & \qquad \alpha_{r\ell} &= z_r \\ \alpha_{\ell r} + \alpha_{r\ell} &= \alpha_{r\ell} + z_\ell & \qquad \alpha_{\ell r} &= z_\ell \end{aligned}$$

Damit lassen sich die Koeffizienten ganz einfach bestimmen. Betrachte einen Bereich zwischen zwei Eckspalten. Eine der dort vorhandenen zwei Einserreihen geht von *links* nach rechts. Ihr Koeffizient $\alpha_{\ell r}$ ist die *linke* Zahl z_ℓ. Wenn sie von rechts geht, ist ihr Koeffizient die rechte Zahl.

Nun hat jeder Block zwei Einserreihen in zwei Bereichen, ihm kann aber immer nur ein Koeffizient zugewiesen werden. Das heißt, dass die Koeffizienten, die einem Block in beiden Bereichen zugewiesen werden, gleich sein müssen. Diese Koeffizienten sind aber Koeffizienten z_i der ursprünglichen Gleichung. Die nebenstehende Abbildung verdeutlicht den Ablesevorgang.



Wenn diese Koeffizienten beide gleich sind, können wir eine solche Linear-

$$
\begin{array}{|*{24}{c|}}
\hline
{\scriptstyle 0} & {\scriptstyle 1} & & {\scriptstyle n-2} & {\scriptstyle n-1} & {\scriptstyle n} & & {\scriptstyle 2n-3} & {\scriptstyle 2n-2} & {\scriptstyle 2n-1} & & {\scriptstyle 3n-4} & {\scriptstyle 3n-3} & {\scriptstyle 3n-2} & & {\scriptstyle 4n-5} & {\scriptstyle 4n-4} & {\scriptstyle 4n-3} & & {\scriptstyle 5n-6} & {\scriptstyle 5n-5} & {\scriptstyle 5n-4} & & {\scriptstyle 6n-7} \\
E & D & & G & H & I & & A & B & C & & D & E & F & & I & H & G & & C & B & A & & F \\
\hline
\hline
1 & 2 & & 2 & 1 & & & -3 & -2 & -1 & & 2 & 1 & & & & 1 & 2 & & -1 & -2 & -3 & & \\
1 & 2 & & 1 & & -1 & & -2 & -1 & & & 2 & 1 & & & -1 & & 1 & & & -1 & -2 & & \\
 & 1 & & 2 & 1 & & & -2 & -1 & & & 1 & & -1 & & & 1 & 2 & & & -1 & -2 & & -1 \\
\hline
\hline
&&&&&& 1 &&&&&&&&&&&&&&&& 1 & \\
&&&&&& \iddots &&&&&&&&&&&&&&&& \ddots & \\
&&&&&& 1 &&&&&&&&&&&&&&&& 1 & \\
&&&&& 1 &&&&&&&&&&&&&&&&&& 1 \\
\hline
&&&&&&&&&& 1 &&&&&&&& 1 &&&&& \\
&&&&&&&&&& \ddots &&&&&&&& \iddots &&&&& \\
&&&&&&&&&& 1 &&&&&&&& 1 &&&&& \\
&&&&&&&&&&& 1 &&&&&& 1 &&&&&& \\
\hline
&& 1 &&&&&&&& 1 &&&&&&&&&&&&& \\
&& \ddots &&&&&&&& \iddots &&&&&&&&&&&&& \\
&& 1 &&&&&&&& 1 &&&&&&&&&&&&& \\
&&& 1 &&&&&& 1 &&&&&&&&&&&&&& \\
\hline
&&&&&&&&&&&&&& 1 &&&&&&&& 1 & \\
&&&&&&&&&&&&&& \ddots &&&&&&&& \iddots & \\
&&&&&&&&&&&&&& 1 &&&&&&&& 1 & \\
&&&&&&&&&&&&&&& 1 &&&&&& 1 && \\
\hline
&& 1 &&&&&&&&&&&&&&&& 1 &&&&& \\
&& \iddots &&&&&&&&&&&&&&&& \ddots &&&&& \\
&& 1 &&&&&&&&&&&&&&&& 1 &&&&& \\
& 1 &&&&&&&&&&&&&&&&&& 1 &&&& \\
\hline
&&&&&& 1 &&&&&&&& 1 &&&&&&&&& \\
&&&&&& \ddots &&&&&&&& \iddots &&&&&&&&& \\
&&&&&& 1 &&&&&&&& 1 &&&&&&&&& \\
&&&&&&& 1 &&&&&& 1 &&&&&&&&&& \\
\hline
\hline
1 & 1 & \cdots & 1 & 1 &&&&&&&&&&&&&&&&&&& \\
&&&& 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 &&&&&&&&&&&&&&& \\
&&&&&&&& 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 &&&&&&&&&&& \\
&&&&&&&&&&&& 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 &&&&&&& \\
&&&&&&&&&&&&&&&& 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 &&& \\
&&&&&&&&&&&&&&&&&&&& 1 & 1 & \cdots & 1 \\
\hline
\end{array}
$$

kombination der Gleichungen $\mathcal{E}$ finden, dass die Zahlen zwischen den Eckspalten stets gleich sind, und dann können wir eine Linearkombination der sechs Randgleichungen $\mathcal{N}$ finden, so dass alles aufaddiert überall Nullen ergibt. Und damit ist auch die Erweiterung jeder der drei ursprünglich linear abhängigen Gleichungen tatsächlich stets (für alle Ordnungen der Hexagone) linear abhängig von den neuen Gleichungen.

Formel (1) lifert uns dann die Dimension von $\mathsf{MHex}_n(0)$. Der Rang von ζ_n, also die Anzahl linear unabhängiger Zeilen in der Matrix wächst pro Erweiterung des Hexagons um 6, das heißt rg $\zeta_n = 6(n-1)$, wenn wir beachten, dass rg $\zeta_2 = 9 - 3$ ist. Dann ist

$$\begin{aligned}\dim \mathsf{MHex}_n(0) &= N(n) - 6(n-1) = 3n^2 - 3n + 1 - 6n + 6 \\ &= 3n^2 - 6n + 3 - 3n + 3 + 1 = 3(n-1)^2 - 3(n-1) + 1 = N(n-1)\end{aligned}$$

Was zu beweisen war.

Bemerkung: Die freien Variablen des Hexagons n-ter Ordnung sind *nicht* alle Variablen des Hexagons $(n-1)$-ter Ordnung, es sind nur ebenso viele.

Bemerkung: Die Dimension von $\mathsf{MHex}_n(\zeta)$ für eine beliebige andere Zeilensumme ζ ist die gleiche, wie die Dimension von $\mathsf{MHex}_n(0)$, da $\mathsf{MHex}_n(\zeta)$ affiner Unterraum mit dem Untervektorraum $\mathsf{MHex}_n(0)$ ist. Die Dimension von MHex_n ist dann $\dim \mathsf{MHex}_n(0) + 1$, da die Zeilensumme selbst als weitere Dimension hinzukommt.

(01.09.2010)