# Turmbau mit $n$-Tupeln

Wasilij Barsukow, November 2009
w.barsukow@wwu.de

**Die Abbildung**: Ein 4-Tupel $(z_i)$, $i = 1, 2, 3, 4$ wird durch folgende Vorschrift in ein anderes 4-Tupel überführt: $z_i \mapsto |z_i - z_{i+1}|$, wobei zirkulär gilt: $z_5 \equiv z_1$. Durch genügend häufige Anwendung dieser Vorschrift auf das jeweils letztentstandene Tupel erreicht man das Nulltupel $(0, 0, 0, 0)$.
<u>Frage</u>: Gilt dies immer? Beweis?
Die Menge der so entstandenen Tupel bezeichne man als *Turm*, ihre Anzahl als die *Höhe* des Turms.
**Verallgemeinerung**: Dieses Verfahren lässt sich leicht auch auf $n$-Tupel ausdehnen. Dabei liegen Ergebnisse für die beiden (einzig relevanten) kleineren Tupel vor, für $n = 2$ und $n = 3$. Es lässt sich zeigen, dass die Ableitung im Falle $n = 2$ unabhängig von der Wahl des Tupels nach zwei Schritten terminiert und dass sie für $n = 3$ nie terminiert.
<u>Frage</u>: Was passiert bei $n = 3$ dann? Was kann man allgemein über $n$-Tupel sagen? Gibt es allgemeine Entscheidungskriterien über die Terminierung?
Im Folgenden wollen wir uns aber (bis auf die erwähnten Beweise) nur den 4-Tupeln zuwenden.
Aufgabe (vorläufig): Man konstruiere einen möglichst hohen Turm durch die Wahl eines möglichst günstigen 4-Starttupels.
Man wird später sehen, dass die Höhe der Türme nicht beschränkt ist, so dass es keinen Sinn hat, nach dem höchsten zu fragen. Aber es lohnt sich nach dem kleinsten Tupel zu suchen, das einen Turm vorgegebener Höhe baut:
**Anordnung**: Ein 4-Tupel, dessen Komponenten eine Zahl $N$ nicht übersteigen, soll als Zahl zur Basis $N$ aufgefasst werden, indem $z_4$ die Einer-Stelle, $z_3$ die Zehner-Stelle usw. einnimmt. Somit gilt z. B. (jeweils zur gleichen Basis):

$$\begin{aligned}(0, 1120, 147, 150) &< (1, 0, 0, 0)\\ (0, 1, 2, 3) &> (0, 0, 2, 3)\\ (0, 1, 2, 3) &< (0, 1, 2, 4) < (1, 1, 2, 3)\end{aligned}$$

**Aufgabe**: Man finde das kleinste 4-Tupel, das einen Turm vorgegebener Höhe baut.
An dieser Stelle seien die ersten 19 angegeben. Sie wurden experimentell ermittelt: Die geordnete Menge der Tupel des Turms von Tupel $t$ bezeichne man als Ableitung von $t$.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 8 | 0 | 1 | 4 | 9 |
| 9 | 0 | 2 | 5 | 11 |
| 10 | 0 | 2 | 6 | 13 |
| 11 | 0 | 5 | 14 | 31 |
| 12 | 0 | 6 | 17 | 37 |
| 13 | 0 | 7 | 20 | 44 |
| 14 | 0 | 17 | 48 | 105 |
| 15 | 0 | 20 | 57 | 125 |
| 16 | 0 | 24 | 68 | 149 |
| 17 | 0 | 57 | 162 | 355 |
| 18 | 0 | 68 | 193 | 423 |
| 19 | 0 | 81 | 230 | 504 |

Tabelle 1: Die ersten 19 Rekord-Tupel

Hier die Ableitung für den letzten Tupel:

$$\begin{gathered}(0,81,230,504)\\(81,149,274,504)\\(68,125,230,423)\\(57,105,193,355)\\(48,88,162,298)\\(40,74,136,250)\\(34,62,114,210)\\(28,52,96,176)\\(24,44,80,148)\\(20,36,68,124)\\(16,32,56,104)\\(16,24,48,88)\\(8,24,40,72)\\(16,16,32,64)\\(0,16,32,48)\\(16,16,16,48)\\(0,0,32,32)\\(0,32,0,32)\\(32,32,32,32)\end{gathered}$$

**Turmbau rückwärts. Unbeschränktheit der Türme**: Man kann in allgemeinen Zügen nachverfolgen, was passiert, wenn solch ein Turm abgeleitet wird. Man kann aber auch versuchen zu einem vorgegebenen Tupel einen (der) Vorgänger zu rekonstruieren. Dies ist derjenige Weg, der hier eingeschlagen werden soll. Man muss beachten, dass die Betragsfunktion nicht eindeutig umkehrbar ist, so dass man viele Vorgänger bekommen wird. Zum Tupel $(a,b,c,d)$ sind $(x, \pm x \pm a, \pm x \pm a \pm b, \pm x \pm a \pm b \pm c)$ Vorgängertupel, wobei die Vorzeichen nicht alle unabhängig sind. Man kann alle Möglichkeiten bestimmen: Sei

$x$ der Vorgänger von $a$. Dann sind

$$\begin{aligned}
&x + a \\
&x - a \\
&-x + a \\
&-x - a
\end{aligned}$$

die Vorgänger von $b$. Die Vorgänger von c sind:

$$\begin{array}{ccc}
x + a + b & x + a - b - x - a + b & -x - a - b \\
x - a + b & x - a - b - x + a + b & -x + a - b \\
-x + a + b & -x + a - bx - a + b & x - a - b \\
-x - a + b & -x - a - bx + a + b & x + a - b
\end{array}$$

Dabei ist aus der oberen Zeile auszuwählen, wenn man bei dem Vorgänger von $b$ die obere Zeile gewählt hat usw. Die unteren beiden Zeilen enthalten die gleichen Terme wie die oberen beiden Zeilen. Die genauen Vorzeichen für die 32 Möglichkeiten (16 unterschiedliche) des Vorgängers von $d$ möge man sich selbst zusammenstellen. Wichtig ist aber die Forderung, dass $|$Vorgänger von $d-$ Vorgänger von $a| = d$. Dies führt auf eine der 16 Gleichungen $\pm a \pm b \pm c = \pm d$. Untersucht wurde bisher nur die Gleichung $a + b + c = d$. Dies hat seinen Grund in der Art und Weise, wie die Rekord-Tupel aus Tabelle 1 ihre Türme konstruieren. Doch ist offensichtlich, dass $(0, 0, 0, 0)$ als Vorgänger $(x, x, x, x)$ haben muss, das sicher nicht dieser Gleichung genügt. In der Tat werden oft die ersten und letzten Schritte anders konstruiert.

FRAGE: Was sind die Eigenschaften der Konstruktionsmöglichkeiten hinsichtlich der Effizienz und Höhe des Turms? Warum nutzen alle Rekord-Tupel die $(a + b + c = d)$-Konstruktion?

Noch ist die Wahl von $x$ frei gestellt. Aber angenommen, man würde auch beim nächsten Schritt in der rückwärtigen Ableitung das gleiche Konstruktionsprinzip $a+b+c = d$ auch beim Vorgänger anwenden wollen. Dann muss offenbar gelten:

$$\begin{aligned}
x + x + a + x + a + b &= x + a + b + c \\
2x &= c - a
\end{aligned}$$

Es wäre ausgezeichnet, könnte man dieses Konstruktionsprinzip immer weiter verwenden. Denn dann könnte man einen Tupel wählen, für den die Bedingung $a + b + c = d$ gilt und der zum Nulltupel führt und könnte immer weiter einen Vorgänger nach dem nächsten anfügen und damit die Turmhöhe beliebig vergrößern. Aber das geht nicht so einfach, denn es steht gar nicht fest, dass $c - a$ überhaupt durch 2 teilbar ist. Aber man kann sich trotzdem behelfen, denn das Grundtupel, über dem wir den Turm bauen wollen kann ja auch noch beliebig gewählt werden. Wählt man kraft weise Voraussicht einen Tupel der Form $(0, a, 0, a)$, so ergibt sich der folgende Turm: **Transposition**: Eine komponentenweise Addition des gesamten Tupels mit einer Zahl $k$ ändert nichts als das Anfangstupel. Denn schon im zweiten Schritt verschwinden diese Zahlen bei der Betragsbildung. Das neue Starttupel bezeichne man als *transponiert*. Nun wird auch klar, warum alle Rekord-Tupel mit Null anfangen: Wenn man ein Tupel $(a, b, c, d)$ mit einer Turmhöhe $h$ gefunden hat, so hat sicher auch $(0, b-a, c-a, d-a)$ die gleiche Ableitung und somit die gleiche Turmhöhe.

| | | | |
|---|---|---|---|
| ... | ... | ... | ... |
| $\frac{5}{8}a$ | $\frac{9}{8}a$ | $\frac{17}{8}a$ | $\frac{31}{8}a$ |
| $\frac{1}{2}a$ | $a$ | $\frac{7}{4}a$ | $\frac{13}{4}a$ |
| $\frac{1}{2}a$ | $\frac{3}{4}a$ | $\frac{3}{2}a$ | $\frac{11}{4}a$ |
| $\frac{1}{4}a$ | $\frac{3}{4}a$ | $\frac{5}{4}a$ | $\frac{9}{4}a$ |
| $\frac{1}{2}a$ | $\frac{1}{2}a$ | $a$ | $2a$ |
| $0$ | $\frac{1}{2}a$ | $a$ | $\frac{3}{2}a$ |
| $\frac{1}{2}a$ | $\frac{1}{2}a$ | $\frac{1}{2}a$ | $\frac{3}{2}a$ |
| $0$ | $0$ | $a$ | $a$ |
| $0$ | $a$ | $0$ | $a$ |

Tabelle 2: Allgemeiner Turm zu dem Tupel $(0, a, 0, a)$