Zwei Herleitungen der barometrischen Höhenformel

Wasilij Barsukow, August 2009
w.barsukow@wwu.de

Teil 1 - Über die Integralfunktion

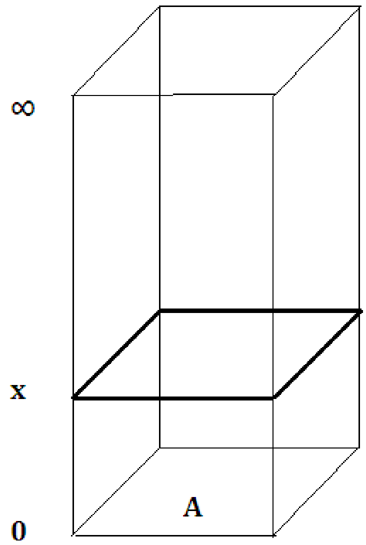

Abbildung 1: Zu Teil 1

Der Druck an der Höhe x soll genau so groß sein, dass er und die Gewichtskraft der darüber liegenden Luftsäule sich genau die Waage halten:

$$p(x) \cdot A = \int g dm = gA \int_{x'=x}^{\infty} \rho(x') dx'$$

Unter der Voraussetzung, dass das uneigentliche Integral $\int_{x'=x}^{\infty} \rho(x') dx'$ konvergiert, kann man diesen auch schreiben als $C - \int_{x'=0}^{x} \rho(x') dx'$. Seine Konvergenz wird von der Endlichkeit der Teilchenzahl gefordert und soll als erfüllt gelten.

$$p(x) \cdot A = gA \left(C - \int_{x'=0}^{x} \rho(x') dx' \right)$$
$$p(x) = g \left(C - \int_{x'=0}^{x} \rho(x') dx' \right)$$

Nach der allgemeinen Gasgleichung, die für die Luft als in guter Näherung anwendbar gelten soll, gilt für ein beliebiges Volumen $pV = Nk_BT = \frac{M}{\mu} k_BT = \frac{\rho V}{\mu} k_BT$ (μ: Masse eines Teilchens).

Damit (im isothermen Fall!):

$$p(x) = \rho(x)\frac{k_B T}{\mu} = g\left(C - \int_{x'=0}^{x} \rho(x')dx'\right)$$
$$\frac{k_B T}{\mu g}\rho'(x) = -\rho(x)$$

Diese DGL wird von der Funktion $\rho(x) = \rho_0 \exp\left(-\frac{\mu g}{k_B T}\right)$ gelöst.

Teil 2 - Über infinitesimale Betrachtungen

An der Stelle x herrsche der Druck $p(x)$. Gleichzeitig gehen wir von Gleichgewicht aus, so dass dieser Druck eine Kraft F von oben ausgleicht (Gewichtskraft der darüber liegenden Luftsäule): $F = p(x)A$. Eine dx-dicke Schicht weiter oben muss eine geringere Kraft ausgeglichen werden, nämlich $F - A \cdot dx \cdot \rho(x) \cdot g$. Einsetzen:

$$\begin{aligned} p(x+dx)A = F - A \cdot dx \cdot \rho(x) \cdot g = p(x)A - A \cdot dx \cdot \rho(x) \cdot g \\ p(x+dx) - p(x) = dx\rho(x)g \\ p'(x) = \rho(x)g \end{aligned}$$

Mit $p(x) = \rho(x)\frac{k_B T}{\mu}$ nach der allgemeinen Gasgleichung (s.o.) gilt auch $p'(x) = \rho'(x)\frac{k_B T}{\mu}$ und somit $\rho'(x)\frac{k_B T}{\mu} = \rho(x)g$ bzw. $\rho'(x) = \rho(x)\frac{\mu g}{k_B T}$. Diese DGL wird, wie oben, von der Funktion $\rho(x) = \rho_0 \exp\left(-\frac{\mu g}{k_B T}\right)$ gelöst.