Über Eigenschaften der Funktion x^{x^x} im Negativen

Wasilij Barsukow, Winter 2009
w.barsukow@wwu.de

Es sei $\eta(x) := x^{x^x}$. Für $x \geq 0$ verlässt sie nicht den Bereich $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen. Für negative x allerdings ist die Funktion im Allgemeinen komplexwertig. Es sei also $\bar{\eta}(x) := (-x)^{(-x)^{(-x)}}$ mit nunmehr ausschließlich positivem x.

Wir schreiben den Term etwas um:

$$\bar{\eta}(x) = (-x)^{\frac{1}{(-x)^x}} = \sqrt[(-x)^x]{-x} = \sqrt[(-x)^x]{-1}\ \sqrt[(-x)^x]{x}$$

Der Exponent ist wegen $(-1)^y = \mathrm{i}\sin(y\pi) + \cos(y\pi)$, $y \in \mathbb{R}$ eine komplexe Zahl:

$$\begin{aligned}(-x)^x &= (-1)^x \cdot x^x \\ &= \mathrm{i}\,\underbrace{x^x\sin(\pi x)}_{b} + \underbrace{x^x\cos(\pi x)}_{a}\end{aligned}$$

Der Kürze halber gilt also

$$\begin{aligned}a &= x^x\cos(\pi x) \\ b &= x^x\sin(\pi x)\end{aligned}$$

Für Wurzeln gilt ($y \in \mathbb{R}$):

$$\sqrt[a+b\mathrm{i}]{y} = y^{\frac{1}{a+b\mathrm{i}}} = y^{\frac{a-b\mathrm{i}}{(a+b\mathrm{i})(a-b\mathrm{i})}} = y^{\frac{a-b\mathrm{i}}{a^2+b^2}} = \sqrt[a^2+b^2]{\frac{y^a}{(y^\mathrm{i})^b}}$$

Damit ergibt sich für die erste Wurzel:

$$\sqrt[(-x)^x]{-1} = \sqrt[a+b\mathrm{i}]{-1} = \sqrt[a^2+b^2]{\frac{(-1)^a}{\left((-1)^\mathrm{i}\right)^b}}$$

Mithilfe des Hauptwerts des komplexen Logarithmus gilt für $(-1)^\mathrm{i}$:

$$(-1)^\mathrm{i} = e^{\ln(-1)\mathrm{i}} = e^{(\ln(1)+\mathrm{i}\pi)\mathrm{i}} = e^{\mathrm{i}\pi\mathrm{i}} = e^{-\pi}$$

Aus der ersten Wurzel wird dann:

$$\sqrt[a^2+b^2]{\frac{(-1)^a}{e^{-\pi b}}} = (-1)^{\frac{a}{a^2+b^2}} \cdot \exp\left(\frac{\pi b}{a^2+b^2}\right) = \left[\mathrm{i}\sin\left(\frac{a\pi}{a^2+b^2}\right) + \cos\left(\frac{a\pi}{a^2+b^2}\right)\right] \cdot \exp\left(\frac{\pi b}{a^2+b^2}\right)$$

Analog ist die zweite Wurzel $\sqrt[(-x)^x]{x}$ gleich

$$x^{\frac{a}{a^2+b^2}} \cdot x^{\frac{-\mathrm{i}b}{a^2+b^2}} = x^{\frac{a}{a^2+b^2}} \cdot \exp\left(\frac{-\mathrm{i}b\ln x}{a^2+b^2}\right) = x^{\frac{a}{a^2+b^2}} \cdot \left[-\mathrm{i}\sin\left(\frac{b\ln x}{a^2+b^2}\right) + \cos\left(\frac{b\ln x}{a^2+b^2}\right)\right]$$

Die beiden Wurzeln müssen noch miteinander multipliziert werden. Für das Produkt allein der komplexen Zahlen ergibt sich (sortiert nach Real- / Imaginärteil):

$$\begin{gathered}\mathrm{i}\left[\sin\left(\frac{a\pi}{a^2+b^2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\ln x \cdot b}{a^2+b^2}\right) - \cos\left(\frac{a\pi}{a^2+b^2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\ln x \cdot b}{a^2+b^2}\right)\right] \\ + \sin\left(\frac{a\pi}{a^2+b^2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\ln x \cdot b}{a^2+b^2}\right) + \cos\left(\frac{a\pi}{a^2+b^2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\ln x \cdot b}{a^2+b^2}\right)\end{gathered}$$

Nach Anwendung der Additionstheoreme wird daraus

$$\bar{\eta}(x) = \exp\left(\frac{\pi b}{a^2+b^2}\right) \cdot x^{\frac{a}{a^2+b^2}} \cdot \left[\cos\left(\frac{a\pi - b\ln x}{a^2+b^2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{a\pi - b\ln x}{a^2+b^2}\right)\right]$$

Mit $a = x^x\cos(\pi x)$ und $b = x^x\sin(\pi x)$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} a^2+b^2 &= x^{2x} \\ \frac{a}{a^2+b^2} &= \frac{\cos(\pi x)}{x^x} \\ \frac{b}{a^2+b^2} &= \frac{\sin(\pi x)}{x^x} \\ \frac{a\pi - b\ln x}{a^2+b^2} &= \pi\frac{\cos(\pi x)}{x^x} - \ln x\frac{\sin(\pi x)}{x^x} \\ &= \frac{\pi\cos(\pi x) - \ln x\sin(\pi x)}{x^x} \end{aligned}$$

Eingesetzt:

$$\bar{\eta}(x) = \exp\left(\frac{\pi\sin(\pi x)}{x^x}\right) \cdot x^{\frac{\cos(\pi x)}{x^x}} \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi\cos(\pi x) - \ln x\sin(\pi x)}{x^x}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi\cos(\pi x) - \ln x\sin(\pi x)}{x^x}\right)\right]$$

$$\begin{aligned} \bar{\eta}(x) &= \exp\left(\frac{\pi\sin(\pi x)}{x^x}\right) \cdot \exp\left(\frac{\ln x\cos(\pi x)}{x^x}\right) \cdot \exp\left(\mathrm{i}\frac{\pi\cos(\pi x) - \ln x\sin(\pi x)}{x^x}\right) \\ \bar{\eta}(x) &= \exp\left(\frac{\pi\sin(\pi x) + \ln x\cos(\pi x) + \mathrm{i}(\pi\cos(\pi x) - \ln x\sin(\pi x))}{x^x}\right) \end{aligned}$$