Waagerechter Wurf im Gravitationsfeld

Wasilij Barsukow, Januar 2010
w.barsukow@wwu.de

Situation: Man steht auf einem Berg auf der Erde und wirft waagerecht einen Stein mit der Masse m und der Geschwindigkeit v von sich weg. Dabei bewegt sich dieser unter der Annahme eines homogenen Gravitationsfeldes, wie gewöhnlich angenommen, auf einer sogenannten *Wurfparabel*. Tatsächlich haben wir allerdings ein Gravitationsfeld, das mit $\frac{1}{r^2}$ abnimmt und somit bewegt sich dieser Stein auf einer *Kepler-Ellipse*:

Aus dem Zwei-Körper-Problem ist bekannt: $r(\varphi) = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}$. Diese Ellipse kann man auch einmal der einfacheren Rechnung wegen drehen: $r(\varphi) = \frac{p}{1+\varepsilon\cos(\varphi+\varphi_P)}$. Sei $\varphi_P = \frac{\pi}{2}$. Dann ergibt sich nach den Formeln der Trigonometrie: $r(\varphi) = \frac{p}{1-\varepsilon\sin(\varphi)}$.

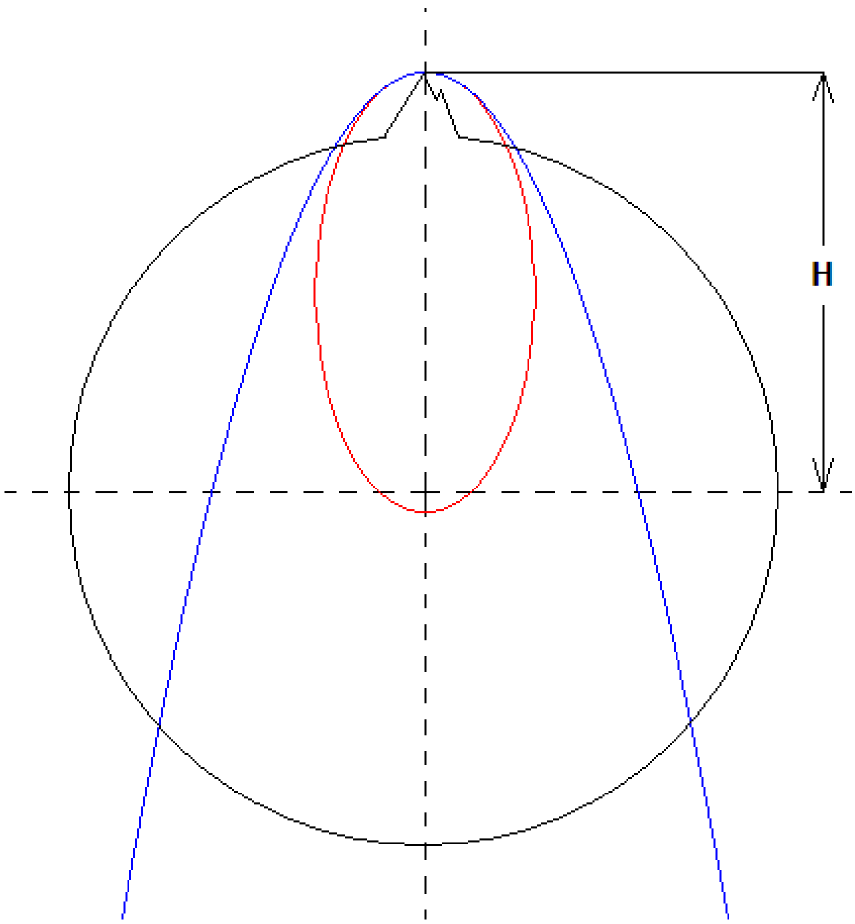

Abbildung 1: Skizze

Wir wissen (vgl. Abb.): $r\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{p}{1-\epsilon} = H$. Aus der Lösung des Kepler-Problems ist auch bekannt, dass $p = \frac{L^2}{m^2GM}$. L ist dabei der Drehimpuls des Steins, der sich ja nicht ändert: $L = Hmv$: $p = \frac{m^2H^2v^2}{m^2GM} = \frac{H^2v^2}{GM}$. Aus der ersten Beziehung erhalten wir dann $\varepsilon = 1 - \frac{p}{H} = 1 - \frac{Hv^2}{GM}$.

Die Ellipse hat eine Darstellung in kartesischen Koordinaten, denn $r = \sqrt{x^2+y^2}$ und

$\tan\varphi = \frac{y}{x}$. Damit:

$$
\begin{aligned}
\sqrt{x^2+y^2} &= \frac{p}{1-\varepsilon\cdot\frac{\frac{y}{x}}{\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}}} \\
&= \frac{p}{1-\frac{\varepsilon y}{\sqrt{x^2+y^2}}} \\
\sqrt{x^2+y^2}-\varepsilon y &= p \\
x^2+y^2 &= p^2+2p\varepsilon y+\varepsilon^2 y^2 \\
0 &= y^2(\varepsilon^2-1)+2p\varepsilon y+p^2-x^2 \\
y &= \frac{-p\varepsilon\pm\sqrt{x^2(\varepsilon^2-1)+p^2}}{\varepsilon^2-1}
\end{aligned}
$$

Interessant ist hier im folgenden nur das negative Vorzeichen, weil es der oberen Halbellipse entspricht.

Nun kann man diese Funktion um $x = 0$ Taylor-entwickeln:

$$
\begin{aligned}
y(x) &\approx y(0) + x\cdot y'(0) + \frac{x^2}{2}\cdot y''(0) \\
y(0) &= \frac{-p\varepsilon-p}{\varepsilon^2-1} = -p\frac{\varepsilon+1}{(\varepsilon-1)(\varepsilon+1)} = \frac{p}{1-\varepsilon} = H \\
y'(0) &= 0 \\
y''(0) &= -\frac{GM}{v^2H^2}
\end{aligned}
$$

Mit der Definition der Feldstärke $g = \frac{GM}{H^2}$ ergibt sich tatsächlich eine Wurfparabel: $y(x) \approx H - \frac{x^2}{v^2}\frac{g}{2}$. Weiterhin erhält man:

$$
\begin{aligned}
y'''(0) &= 0 \\
y^{(4)}(0) &= \frac{3GM(v^2H-2GM)}{v^4H^5} = \frac{3g(v^2-2gH)}{v^4H^2}
\end{aligned}
$$