Transformationen zwischen geradlinigen Koordinatensystemen

Wasilij Barsukow, Juni 2009
w.barsukow@wwu.de

Gegeben sei ein Koordinatensystem K mit einer Basis $\{\vec{e}_i\}$ gegenüber einem „Welt-Koordinatensystem“. Die Koordinatenachsen seien gerade, müssen allerdings nicht rechtwinklig sein. Über die Anzahl der $\vec{e}_i$ soll zunächst nichts weiter spezifiziert werden, außer dass es, der Bezeichnung *Basis* gemäß, ausreichend von ihnen gebe, aber auch nicht zu viel. Diese Anzahl ist dann in einem Vektorraum $\mathbb{R}^n$ genau n, sie ändert sich bei der Transformation auch nicht, da der gegebene Vektorraum nicht verlassen wird.

Die zusätzliche Forderung, dass die Koordinatensysteme gleichen Ursprung haben, ist so wenig einschränkend, dass sie im Folgenden angenommen wird. Bei unterschiedlichen Ursprüngen müssen zunächst durch eine geeignete Translation die Ursprünge übereinander gebracht werden.

Der Vektor $\vec{v}$ habe im Koordinatensystem K die Komponenten v_i, die sich als $\vec{v} \cdot \vec{e}_i$ berechnen. Er lässt sich also als $\vec{v} = \sum \vec{e}_i \cdot v_i$ schreiben[1].

Dieser Vektor hat sich aus Sicht eines anderen Koordinatensystems K' mit er Basis $\{\vec{e}'_i\}$ nicht verändert, sehr wohl aber seine Komponenten:

$$\vec{v} = \sum \vec{e}_i v_i = \sum \vec{e}'_i v'_i \tag{1}$$

Dies ist ein Gleichungssystem aus n Gleichungen mit n Variablen – den v'_i nämlich. Nachfolgend soll (**??**) an immer weiter eingeschränkten Beispielen gelöst werden. Jede der Vereinfachungen setzt die vorausgegangenen voraus.

1 Zwei Dimensionen

$$\vec{v} = \vec{e}_1 v_1 + \vec{e}_2 v_2 = \vec{e}'_1 v'_1 + \vec{e}'_2 v'_2$$

oder als LGS

$$\begin{aligned} e_{1x} v_1 + e_{2x} v_2 &= e'_{1x} v'_1 + e'_{2x} v'_2 \\ e_{1y} v_1 + e_{2y} v_2 &= e'_{1y} v'_1 + e'_{2y} v'_2 \end{aligned}$$

Determinanten:

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} e'_{1x} & e'_{2x} \\ e'_{1y} & e'_{2y} \end{vmatrix} \\ D &= e'_{1x} e'_{2y} - e'_{1y} e'_{2x} = \begin{pmatrix} e'_{1x} \\ e'_{1y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e'_{2y} \\ -e'_{2x} \end{pmatrix} \\ D_{v'_1} &= (e_{1x} v_1 + e_{2x} v_2) e'_{2y} - (e_{1y} v_1 + e_{2y} v_2) e'_{2x} \\ D_{v'_2} &= e'_{1x} (e_{1y} v_1 + e_{2y} v_2) - e'_{1y} (e_{1x} v_1 + e_{2x} v_2) \end{aligned}$$

[1] Die Summierung soll, so wie hier, auch im Folgenden über alle Dimensionen des Raumes erstreckt werden, soweit nichts gegenteiliges angegeben.

Damit:

$$v'_1 = \frac{1}{D}\left[\begin{pmatrix} e_{1x} \\ e_{2x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} e'_{2y} - \begin{pmatrix} e_{1y} \\ e_{2y} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} e'_{2x}\right] \tag{2}$$

$$v'_2 = \frac{1}{D}\left[\begin{pmatrix} e_{1y} \\ e_{2y} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} e'_{1x} - \begin{pmatrix} e_{1x} \\ e_{2x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} e'_{1y}\right] \tag{3}$$

Dieses Ergebnis ließe sich auch als Matrix schreiben!

2 Orthonormalbasis

Die Vektoren $\vec{e'_1}$ und $\vec{e'_2}$ sollen aufeinander senkrecht stehen. Die Determinante D ist das Skalarprodukt aus zwei Vektoren: $\begin{pmatrix} e'_{1x} \\ e'_{1y} \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} e'_{2y} \\ -e'_{2x} \end{pmatrix}$. Der letztere steht senkrecht auf $\begin{pmatrix} e'_{2x} \\ e'_{2y} \end{pmatrix}$, somit sind sie (anti)parallel. Wenn sie auch noch normiert sind, so dass gilt $|\vec{e'_1}| = |\vec{e'_2}| = 1$, dann ist $D = \pm 1$.

Für $\vec{e'_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{e'_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist D offensichtlich $1 \cdot 1 + 0 = 1$. Für $\vec{e'_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{e'_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ – dieses System geht nur durch Spiegelung aus dem ersteren hervor – gilt $D = -1$.

3 Ausgangskoordinatensystem ist das „Welt-KS“

Es ist oft $\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Damit:

$$v'_1 = \pm \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e'_{2y} \\ -e'_{2x} \end{pmatrix}$$

$$v'_2 = \pm \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -e'_{1y} \\ e'_{1x} \end{pmatrix}$$

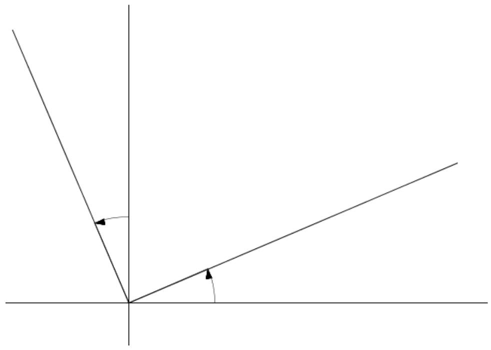
Das untere Vorzeichen gilt, wenn die Transformation zusätzlich auch eine Spiegelung enthält.

$$\begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} e'_{2y} & -e'_{2x} \\ -e'_{1y} & e'_{1x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

4 Drehung des KS um den Winkel α

Drehung ohne Spiegelung!

Es wird angenommen, dass das Koordinatensystem K' um α in die positive Richtung gedreht wurde. Das entspricht einer Drehung der Vektoren um $(-\alpha)$.



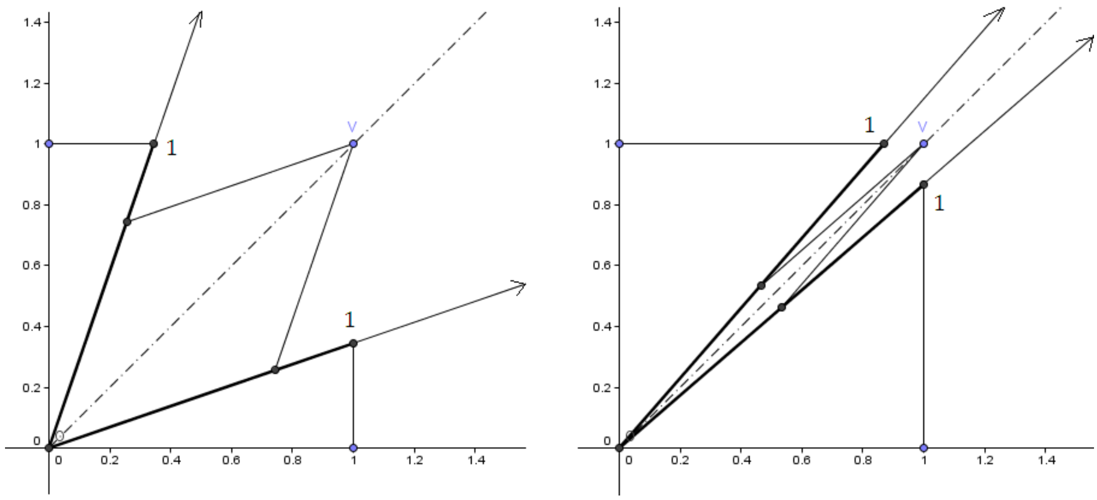
$$\vec{e_1'} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$$

$$\vec{e_1'} = \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Für eine Drehung um $(-\alpha)$ gilt: $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$, $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$.

5 Beispiel: Zwei schiefwinklige, nicht normierte Systeme in 2D



Die Achsen des neuen Koordinatensystems werden symmetrisch zur Winkelhalbierenden des alten Systems gedreht. Die neue Einheitslänge sei die senkrechte Projektion der alten Einheitslänge auf die neue Achse. Dann gilt:

$$\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\vec{e_1'} = \begin{pmatrix} 1 \\ \tan\alpha \end{pmatrix}$$
$$\vec{e_2'} = \begin{pmatrix} \tan\alpha \\ 1 \end{pmatrix}$$

Mit den Formeln (**??**) und (**??**):

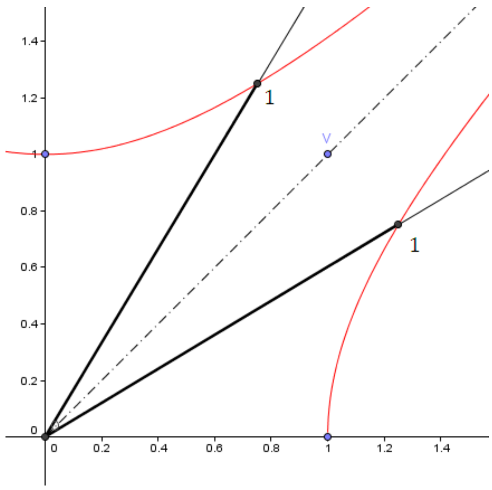
$$D = 1 - \tan^2\alpha$$
$$v_1' = \frac{v_1 - v_2 \tan\alpha}{D}$$
$$v_2' = \frac{-v_1 \tan\alpha + v_2}{D}$$
$$M = \frac{1}{1 - \tan^2\alpha} \begin{pmatrix} 1 & -\tan\alpha \\ -\tan\alpha & 1 \end{pmatrix}$$

Beispiel eines besonderen Punktes $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$:

$$\vec{v'} = \frac{1}{1 - \tan^2\alpha} \begin{pmatrix} 1 - \tan\alpha \\ 1 - \tan\alpha \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{1 + \tan\alpha}$$
$$= \vec{v} \frac{1}{1 + \tan\alpha}$$

Mit $\tan\alpha \geq 0$ ist $\frac{1}{1+\tan\alpha} \leq 1$, was auch an der Abbildung bestätigt wird. Die neuen Komponenten sind kleiner als Eins. Für den Grenzfall $\alpha = 45°$ ergibt sich $\vec{v'} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Nun sollen die Achsen des neuen Koordinatensystems wieder um den Winkel α, dessen Tangens als β bezeichnet werden soll, zur Winkelhalbierenden des alten Systems gedreht werden. Die Wahl der Einheit soll allerdings anders ausfallen: Zu einem Winkel α ist die Eins im neuen KS dort, wo die Achse die Hyperbel $y^2 = x^2 - 1$ des alten Koordinatensystems trifft (Abb. **??**).



$\vec{e_1'}$ soll bei $\begin{pmatrix} x \\ \sqrt{x^2-1} \end{pmatrix}$ liegen, und zwar so, dass $\frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = \beta$:

$$\begin{aligned}
\frac{x^2-1}{x^2} &= \beta^2 \\
x^2 - 1 &= \beta^2 x^2 \\
x^2 &= \frac{1}{1-\beta^2} \\
\sqrt{x^2-1} &= \sqrt{\frac{\beta^2}{1-\beta^2}} = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}
\end{aligned}$$

Abkürzend soll gelten: $\gamma := \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$. Damit:

$$\begin{aligned}
\vec{e_1} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\vec{e_2} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
\vec{e_1'} &= \begin{pmatrix} \gamma \\ \gamma\beta \end{pmatrix} \\
\vec{e_2'} &= \begin{pmatrix} \gamma\beta \\ \gamma \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Es gilt dann:

$$\begin{aligned}
D &= \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)^2 - \frac{\beta^2}{1-\beta^2} = 1 \\
M &= \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Mit der physikalischen Bedeutung von γ als Geschwindigkeitsverhältnis zur Lichtgeschwindigkeit und den Koordinaten als Ort und Zeit ist das die Lorentz-Transformation!